ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА 2025, № 1, с. 76–83

УДК 536.24

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПОЛОГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА

© 2025 г. **Ю. В. Видин[1], В. С. Злобин[1,*]**

[1]Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Сибирский федеральный университет", Красноярск, Россия

[*]e-mail: zlobinsfu@mail.ru

Поступила в редакцию 14.08.2023 г.
После доработки 22.12.2024 г.
Принята к публикации 26.12.2024 г.

Аналитические решения различных задач теплопроводности представлены, как правило, в виде бесконечных рядов и требуют знания корней характеристического уравнения, для определения которых в настоящее время используются численные методы. В данной статье рассмотрена задача нестационарной теплопроводности полого сферического тела и аналитический метод решения характеристического уравнения для граничных условий второго рода. Предложены простые алгебраические выражения для определения собственных чисел характеристического уравнения. Ранее в работах авторов [6, 7, 8] были рассмотрены аналитические методы решения характеристических уравнений для плоских тел (однослойных и многослойных) при различных граничных условиях. Данная статья является дальнейшим развитием аналитических методов определения корней характеристических уравнений.

Ключевые слова: температурное поле, задачи теплопроводности, характеристическое уравнение, собственные числа, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S0002331025010064

Аналитические методы теории теплопроводности тел классической формы (пластина, шар, цилиндр) достаточно хорошо разработаны в литературе [1, 2, 3]. Классические методы удачно дополняют приближенные аналитические методы, позволяющие эффективно решать широкий круг теплофизических задач [4]. Наиболее сложным этапом решения данных задач является определение собственных чисел характеристического уравнения. Решения этих уравнений в настоящее время получают исключительно численными методами [5]. Однако авторам в ряде работ [6, 7, 8] удалось разработать аналитический метод решения данных уравнений. В статье [9] предложен аналитический метод исследования характеристических уравнений в задачах нестационарной теплопроводности сплошного сферического тела. Однако на практике могут иметь место случаи, когда изучаемая конструкция содержит полость. Тогда расчет искомого неустановившегося температурного поля в математическом отношении существенно усложняется. В данной работе излагается инженерный подход для решения такого рода задач. Проиллюстрируем его на конкретном примере. Сформулируем рассматриваемый теплофизический процесс в полой сфере на основе следующих безразмерных соотношений

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\psi^2} + \frac{2}{\psi}\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi}, \tag{1}$$

$$\psi_0 \le \psi \le 1, \ 0 < \mathrm{Fo} < \infty ,$$

$$\frac{\partial\vartheta(\psi,\mathrm{Fo})}{\partial\psi} = 0 \ \text{ при } \psi = \psi_0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\vartheta(\psi,\mathrm{Fo})}{\partial\psi} = \mathrm{Ki} \ \text{ при } \psi = 1, \tag{3}$$

$$\vartheta(\psi,0) = 1. \tag{4}$$

Здесь использованы общепринятые обозначения [2]. Так, в частности, безразмерное число подобия Ki (число Кирпичёва) представляет собой комплекс

$$\mathrm{Ki} = \frac{q_c R}{\lambda\left(T_c - T_0\right)}, \tag{5}$$

где q_c – плотность теплового потока, $\frac{Bm}{\text{м}^2}$; R – радиус наружной поверхности шара, м; λ – коэффициент теплопроводности материала, $\frac{Bm}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$; T_c – температура окружающей среды, °C; T_0 – начальная температура тела, °C; $\psi_0 = \frac{R_0}{R}$ – безразмерный геометрический параметр; R_0 – радиус внутренней поверхности шара, м.

Очевидно, что если $\psi = 0$, т.е. сферическое тело является сплошным, задача (1)–(4) оказывается значительно проще и ее решение известно [1].

Решение рассматриваемой системы (1)–(4) может быть записано в виде

$$\vartheta(\psi,\mathrm{Fo}) = \frac{\mathrm{Ki}}{1-\psi_0^3}\left[3\mathrm{Fo} + \frac{\psi_0^3}{\psi} + \frac{\psi^2}{2} - \frac{3}{1-\psi_0^3}\left(\frac{1}{10} + \frac{\psi_0^3}{2} - \frac{3}{5}\psi_0^5\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{\sin\mu_n\psi}{\psi} + B_n\frac{\cos\mu_n\psi}{\psi}\right)\times\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right)\right] , \tag{6}$$

где коэффициент B_n равен

$$B_n = \frac{(\psi_0\mu_n) - \mathrm{tg}(\psi_0\mu_n)}{1 + (\psi_0\mu_n)\mathrm{tg}(\psi_0\mu_n)}. \tag{7}$$

Если геометрический параметр $\psi_0 = 0$ (сплошное сферическое тело), то, согласно (7), следует, что $B_n = 0$. Подставляя зависимость (6) в граничное условие на поверхности тела (3), находим характеристическое уравнение для определения собственных значений μ_n.

$$\frac{\mu - tg\,\mu}{1 + tg\,\mu} = \frac{\psi_0\mu - tg(\psi_0\mu)}{1 + \psi_0\mu\, tg(\psi_0\mu)}. \tag{8}$$

В случае $\psi_0 = 0$ формула (8) упрощается и принимает вид

$$tg\mu = \mu. \tag{9}$$

В работе [9] дано строгое аналитическое решение для зависимости (9), которое записывается следующим образом

$$\mu_n = \frac{2n+1}{8}\pi + \sqrt{\frac{9(2n+1)^2}{64}\pi^2 - \frac{3}{2}}, \tag{10}$$

где $n = 1, 2, 3,...$

Таблица 1. Первые шесть корней уравнения (8)

ψ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	4.4934	7.7253	10.9041	14.0662	17.2208	20.3713
0.1	4.5223	7.8466	11.1835	14.5553	17.9561	21.3782
0.2	4.6864	8.3781	12.1659	16.0084	19.8801	23.7686
0.3	5.0427	9.3142	13.7008	18.1330	22.5861	27.0503
0.4	5.6390	19.6992	15.8636	21.0618	26.2746	31.4950
0.5	6.5720	12.7214	18.9544	25.2118	31.4793	37.7250
0.6	8.0553	15.8113	23.6322	31.4688	39.3123	47.1592
0.7	10.6049	21.0117	31.4613	41.9220	52.3871	62.8546
0.8	15.7864	31.4556	47.1504	62.8517	78.5557	94.2610
0.9	31.4514	62.8495	94.2596			

В таблице 1 приведены значения первых шести корней уравнения (8) для ряда величин параметра ψ_0, рассчитанные численным методом. Из этой таблицы следует, что корни μ_n очень резко возрастают с повышением номера n и комплекса ψ_0. Поэтому при сравнительно умеренных числах F_O в решении (6) достаточно учитывать только первые слагаемые бесконечного ряда.

Наряду с табличными значениями собственных чисел μ_n уравнения (8) целесообразно располагать также аналитическими зависимостями для их нахождения при любых ψ_0. Используя математические рекомендации, приводимые в справочнике [10], можно представить соотношение (8) в несколько иной форме, а именно

$$tg\left(1-\psi_0\right)\mu = \frac{\left(1-\psi_0\right)\mu}{1+\psi_0\mu^2}, \tag{11}$$

или

$$ctg\left(1-\psi_0\right)\mu = \frac{1+\psi_0\mu^2}{\left(1-\psi_0\right)\mu}. \tag{12}$$

Очевидно, что при $\psi_0 = 0$ формула (11) эквивалентна выражению (9). В большинстве случаев при проведении практических расчетов имеет место условие $\psi_0\mu^2 \gg 1$. Тогда (12) допустимо преобразовать к виду

$$ctg\,\beta = \frac{\beta}{B_i^*}, \tag{13}$$

где под условным числом B_i^* понимается величина

$$B_i^* = \frac{\left(1-\psi_0\right)^2}{\psi_0}, \tag{14}$$

а

$$\beta = \left(1-\psi_0\right)\mu. \tag{15}$$

Следует отметить, что характеристическое уравнение классического типа (13) исследовано весьма всесторонне [6, 7, 8, 9]. В дополнение к рекомендуемым математическим методам определения корней уравнения вида (13) [4, 6, 8] авторами предлагаются также простые аналитические выражения расчета собственных чисел β_n, а именно

$$\beta_n = n\pi\left[1+\frac{3}{2\left(3+B_i^*\right)}\left(\sqrt{1+\frac{4\mathrm{Bi}^*\left(3+B_i^*\right)}{3n^2\pi^2}}-1\right)\right] \tag{16}$$

при $0 < B_i^* \le 5$ и

$$\beta_n = \frac{2n+1}{2}\pi\left[1-\frac{6\left(1+B_i^*\right)}{\left(2n+1\right)^2\pi^2}\left(\sqrt{1+\frac{\left(2n+1\right)^2\pi^2}{3\left(1+B_i^*\right)}}-1\right)\right] \tag{17}$$

при $5 < B_i^* < \infty$, которые с инженерной точки зрения обладают вполне достаточной точностью. Так, в частности, если $B_i^* = 1$, то первое собственное значение β_1, согласно (16), будет равно

$$\beta_1 = \pi\left[1+\frac{3}{2\cdot 4}\left(\sqrt{1+\frac{4\cdot 4}{3\cdot\pi^2}}-1\right)\right] = 3.4257,$$

что полностью соответствует табличной величине [1]. Если же, например, $B_i^* = 10$, то предпочтительнее будет формула (17). Тогда, в данном случае, находим

$$\beta_1 = \frac{3}{2}\pi\left[1 - \frac{6\cdot 11}{9\cdot\pi^2}\left(\sqrt{1+\frac{9\cdot\pi^2}{3\cdot 11^2}} - 1\right)\right] = 4.3074 .$$

Это число незначительно отличается от табличного [1].

Проиллюстрируем на конкретных примерах возможности предлагаемого математического приема для полого сферического тела.

Допустим $\psi_0 = 0.2$. Тогда, согласно формуле (14), получим $B_i^* = \dfrac{(1-0.2)^2}{0.2} = 3.2.$

Этому значению условного числа B_i^* соответствуют корни уравнения (13) [1] $\beta_1 = 3.83676$; $\beta_2 = 6.726$; $\beta_3 = 9.7416$; $\beta_4 = 12.8108$; $\beta_5 = 15.9063$ и далее находим $\mu_1 = 4.796$; $\mu_2 = 8.4075$; $\mu_3 = 11.8395$; $\mu_4 = 16.0135$; $\mu_5 = 19.8829$. Расхождение с табличными данными наиболее заметное имеет место только для первого числа μ_1.

Повторим подобный расчет для $\psi_0 = 0.5$. Тогда $B_i^* = \dfrac{0.5^2}{0.5} = 0.5$ и, следовательно, получим [2] $\beta_1 = 3.2923$; $\beta_2 = 6.3616$; $\beta_3 = 9.4775$; $\beta_4 = 12.6060$; $\beta_5 = 15.7397$, которые смещены на одну единицу по отношению к указанным в [1]. Далее находим искомые числа, которые будут соответственно равны $\mu_1 = 6.5846$; $\mu_2 = 12.7232$; $\mu_3 = 18.9550$; $\mu_4 = 25.2120$; $\mu_5 = 31.4794$. Наибольшее отклонение, по сравнению с табличными, имеет первый корень, которое составляет менее 0.2%. Остальные числа оказываются весьма близкими к табличным. С ростом порядкового номера n невязка существенно убывает. Нужно отметить, что рекомендуемый математический способ позволяет оценить искомые корни μ_n сверху.

И, наконец, проведем аналогичные расчеты для повышенных величин ψ_0 и, в частности, для варианта $\psi_0 = 0.8$, для которого условное число $B_i^* = \dfrac{(1-0.8)^2}{0.8} = 0.05$.

Используя вышеизложенный подход, находим [1] $\beta_1 = 3.1574$; $\beta_2 = 6.2911$; $\beta_3 = 9.4301$; $\beta_4 = 12.5704$; $\beta_5 = 15.7112$ и окончательно вычисляем $\mu_1 = 15.7870$; $\mu_2 = 31.4555$; $\mu_3 = 47.1505$; $\mu_4 = 62.820$; $\mu_5 = 78556$. Сравнение этих величин корней с табличными свидетельствует о вполне приемлемой их точности.

Таким образом, при умеренных и значительных ψ_0 предлагаемый математический способ нахождения собственных чисел μ_n сравнительно сложного характеристического уравнения (8) с помощью приведения его к существенно более простому выражению (13) обладает достаточной с технической точки зрения точностью. При малых величинах ψ_0 рассчитанные по предлагаемой методике первые корни μ_1 и μ_2 могут рассматриваться как оценки сверху для искомых. Используя их в качестве исходных, можно затем определить нижнюю границу для фактического μ_1 или μ_2. Так, например, максимальное значение первого собственного числа μ_1 при $\psi_0 = 0.2$ равно $\mu_1 = 4.796$. Подставляя эту величину в правую часть зависимости (11), находим

$$tg\,0.8\mu_1 = \frac{0.8 \cdot 4.796}{1 + 0.2 \cdot 4.796^2} = 0.6851.$$

Переходя к обратной функции тангенса, находим 0.8 $\mu_1 = 3.7423$, т.е. $\mu_1 = 4.6778$. Следовательно, при $\psi_0 = 0.2$ первый корень μ_1 оказывается в зоне $4.6778 < \mu_1 < 4.796$. Причем нижняя оценка искомого корня μ_1 (или μ_2) ближе к фактической, чем верхняя.

В ряде случаев аналитический расчет первого собственного числа μ_1 характеристического уравнения вида (12), являющегося наиболее важным, можно осуществлять по весьма простым математическим зависимостям. Так, например, если допустить, что комплекс $(1 - \psi_0)\mu_1 = \frac{5\pi}{4}$, то определение корня μ_1 можно выполнить на основе соотношения

$$\mu_1 = \frac{5\pi}{8} + \sqrt{\frac{25\pi^2}{64} + \frac{5\pi}{4} - 1} = 4.5678\,, \tag{18}$$

которому, очевидно, соответствует параметр

$$\psi_0 = 1 - \frac{5\pi}{4\mu_1} = 1 - \frac{5\pi}{4 \cdot 4.5678} = 0.1403. \tag{19}$$

Подобный подход можно использовать и далее. Предположим, что $(1 - \psi_0)\mu_1 = \frac{7\pi}{6}$. Тогда искомый корень μ_1 находим с помощью выражения

$$\mu_1 = \frac{7\pi}{12} + \sqrt{\frac{49\pi^2}{144} + \sqrt{3}\,\frac{7\pi}{6} - 1} = 4.7833. \tag{20}$$

Эта величина согласуется с параметром $\psi_0 = 0.234$. Аналогичные действия применимы и для других значений комплекса $\{1 - \psi_0\}\mu_1$.

Коэффициенты A_n бесконечного ряда, входящего в решение (6), находятся из начального условия рассматриваемой задачи (4), из которого следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n K_n(\mu_n \psi) = \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi_0^3}{\psi} - C, \tag{21}$$

где $K_n(\mu_n\psi) = \frac{\sin \mu_n \psi}{\psi} + B_n \frac{\cos \mu_n \psi}{\psi}$, $C = \frac{3}{1 - \psi_0^3}\left(\frac{1}{10} + \frac{\psi_0^3}{2} - \frac{3}{5}\psi_0^5\right)$.

Умножая левую и правую части равенства (21) на комплекс $\psi^2 K_n(\mu_n\psi)$ и осуществляя интегрирование в пределах $\psi_0 \div 1$, получим формулу для определения A_n

$$A_n = \frac{\int\limits_{\psi_0}^{1} \left(\frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi_0^3}{\psi} - C\psi \right) \left(\sin \mu_n \psi + B_n \cos \mu_n \psi \right) d\psi}{\int\limits_{\psi_0}^{1} \left(\sin \mu_n \psi + B_n \cos \mu_n \psi \right)^2 d\psi}, \tag{22}$$

где процедура интегрирования элементарных функций не представляет существенных трудностей.

Для частного случая ($\psi_0 = 0$), т.е. сплошное сферическое тело) данное выражение принимает простой вид

$$A_n = \frac{2}{\mu_n^3 \cos \mu_n}. \tag{23}$$

В заключение отметим, что в предлагаемой работе показана возможность использования сравнительно простых известных математических зависимостей для получения инженерного решения более сложных и более общих теплофизических задач, представляющих несомненный практический интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
2. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы теории теплопроводности. Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Ч. 1 и 2. М.: Высшая школа, 1982.
3. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 1985. 480 с.
4. *Видин Ю.В.* Инженерные методы теплопроводности. Монография. Изд-во Красноярского университета. 1992. 96 с.
5. *Григорьев Л.Я., Маньковский О.Н.* Инженерные задачи нестационарного теплообмена. Л.: Изд-во Энергия, 1968. 84 с.
6. *Видин Ю.В., Злобин В.С.* Определение собственных значений при расчете нестационарного несимметричного температурного поля в плоском теле. Известия РАН Энергетика, № 3, 2016, С. 148–153.
7. *Видин Ю.В., Злобин В.С.* К расчету собственных чисел в задаче нестационарной теплопроводности плоского тела при несимметричных граничных условиях третьего рода. Известия РАН Энергетика, № 2, 2022, С. 75–81.
8. *Видин Ю.В., Злобин В.С.* Определение собственных значений в задаче нестационарной теплопроводности неоднородного плоского тела. Известия РАН. Энергетика, № 2, 2022, С. 73–78.
9. *Видин Ю.В., Злобин В.С.* Аналитический метод расчета собственных чисел в задаче нестационарной теплопроводности сферического тела. ТВТ, № 2, 2023.
10. *Бронштейн П.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1965. 608 с.

Unsteady Thermal Conductivity of a Hollow Spherical Body

© 2025 г. Yu. V. Vidin[a], V. S. Zlobin[a, *]

[a] *Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*

[*] *e-mail: zlobinsfu@mail.ru*

Analytical solutions to various problems of thermal conductivity are presented, as a rule, in the form of infinite series and require knowledge of the roots of the characteristic equation, for the determination of which numerical methods are currently used. In this article, the problem of unsteady thermal conductivity of a hollow spherical body and an analytical method for solving a characteristic equation for boundary conditions of the second kind are considered. Simple algebraic expressions for determining the eigenvalues of the characteristic equation are proposed. Earlier in the works of the authors [6, 7, 8], analytical methods for solving characteristic equations for flat bodies (single-layer and multi-layer) under various boundary conditions were considered. This article is a further development of analytical methods for determining the roots of characteristic equations.

Keywords: Temperature field, thermal conductivity problems, characteristic equation, eigenvalues, analytical solution