УДК 536.2

БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПРОЗРАЧНОМ ДЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ С ПОГЛОЩАЮЩИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ В ВИДЕ ШАРОВОГО СЛОЯ

© 2025 г. А. В. Аттетков[1, *], А. В. Котович[1, **]

[1]*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)", Москва, Россия*

[*]*e-mail: fn2@bmstu.ru*

[**]*e-mail: shurik.kot@gmail.com*

Поступила в редакцию 19.11.2024 г.
После доработки 22.12.2024 г.
Принята к публикации 26.12.2024 г.

Сформулирована задача определения температурного поля изотропного твердого тела с поглощающим проникающее излучение включением в виде шарового слоя. Реализуемая математическая модель процесса теплопереноса представляет собой смешанную задачу для системы трех уравнений в частных производных второго порядка параболического типа при наличии нестационарного теплового источника в системе.

Предложен аналитический метод решения рассматриваемой задачи, включающий два основных этапа. Первый этап сводится к нахождению решения задачи в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа с последующим его асимптотическим разложением. Используемая процедура позволяет при больших значениях числа Фурье оценить протяженность и радиус границы зоны теплового возмущения. Второй этап, основанный на применении разработанного в работе конечного интегрального преобразования по пространственному переменному для трехслойной области, завершает процедуру построения аналитически замкнутого решения исходной задачи нестационарной теплопроводности.

Ключевые слова: изотропное твердое тело, лазерное излучение, поглощающее включение в виде шарового слоя, температурное поле, интегральные преобразования

DOI: 10.31857/S0002331025010056

ВВЕДЕНИЕ

В математической теории теплопроводности [1–5] специфическое положение занимает математическая модель процесса теплопереноса в изотропном твердом теле с поглощающим проникающее излучение сферическим включением [6–12]. Отмеченная специфика заключается в относительной простоте исходной (базовой) математической модели и трудностях, возникающих при нахождении аналитического решения соответствующей задачи нестационарной теплопроводности. Данное обстоятельство объясняет отсутствие в настоящее время аналитического представления решения задачи для базовой математической модели.

Указанные трудности усугубляются при наличии в анализируемой системе поглощающих включений других геометрических форм. В [13] разработана математическая модель “сосредоточенная емкость” процесса теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим включением в виде шарового слоя. Реализуемая модель предполагает тепловую изоляцию его внешней границы и представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа со специфическим краевым условием, фактически учитывающим наличие термически тонкого шарового слоя в изучаемой системе. Теоретический и значимый практический интерес представляет базовая математическая модель процесса теплопереноса, не использующая гипотезу о том, что поглощающее включение является термически тонким, и учитывающая наличие среды в шаровой полости. Нахождение аналитического решения рассматриваемой задачи нестационарной теплопроводности – основная цель проведенных исследований.

ИСХОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

В качестве объекта исследований рассматривается изотропное пространство с включением радиуса R в виде шарового слоя шириной $\Delta = R - 1$. Шаровая полость единичного радиуса заполнена средой (далее – внешней средой) с начальной температурой, равной начальной температуре объекта исследований. На объект исследований воздействует поток излучения с плотностью мощности f, для которого он абсолютно прозрачен, но может поглощаться шаровым слоем.

В предположении, что тепловые контакты в анализируемой трехслойной системе являются идеальными, и с учетом ранее полученных результатов [13] математическая модель процесса теплопереноса в объекте исследований может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \chi_c \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}, 0 \le \rho < 1, \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \chi\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho} + \Lambda f(\rho,\mathrm{Fo})\right\}, 1 < \rho < R, \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}, \rho > R, \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\theta(\rho,0) = 0;$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\rho=0} < +\infty; \quad \left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=0} = 0;$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=1-0} = \theta\big|(\rho,\mathrm{Fo})_{\rho=1+0};$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=1-0} = \Lambda_c \left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=1+0}; \tag{1}$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R-0} = \theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R+0};$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R-0} = \Lambda \left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R+0}$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{Fo\ge 0} \in L^2_{\rho^2}[0,+\infty);\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho\ge 0} \in L^2[0,+\infty);$$

$$f(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{Fo\ge 0} \in L^2[1,R];f(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho\in[1,R]} \in L^2[0,+\infty).$$

В математической модели (1) использованы следующие обозначения:

$$\mathrm{Fo} = \frac{a_1 t}{r_0^2};\rho = \frac{r}{r_0};\theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0};R = \frac{r_0 + \tilde{\Delta}}{r_0};\chi = \frac{a_2}{a_1};$$

$$\chi_c = \frac{a_c}{a_1};\Lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2};\Lambda_c = \frac{\lambda_2}{\lambda_c} = \Lambda^{-1}\frac{\lambda_1}{\lambda_c};f = \frac{qr_0}{\lambda_1(T_* - T_0)},$$

где $T(r, t)$ – температура в момент времени t в точках изучаемой системы, отстоящих от центра шаровой полости радиуса r_0 на расстоянии r; λ – теплопроводность; α – температуропроводность; T_* – масштабная температура; индексы: 1 – изотропное пространство; 2 – поглощающий шаровой слой ширины $\tilde{\Delta}$; c – внешняя среда; 0 – начальное значение.

Если воспользоваться стандартным приемом [1] и считать

$$V(\rho,\mathrm{Fo}) \triangleq \rho\theta(\rho,\mathrm{Fo});\zeta(\rho,\mathrm{Fo}) \triangleq \chi\Lambda\rho f(\rho,\mathrm{Fo}), \tag{2}$$

то, согласно, (1), (2) приходим к математической модели для определения неизвестной функции $V(\rho, \mathrm{Fo})$:

$$\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \chi_c \frac{\partial^2 V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}, 0 \le \rho < 1, \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \chi \frac{\partial^2 V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2} + \zeta(\rho,\mathrm{Fo}), 1 < \rho < R, \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}_o} = \frac{\partial^2 V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}, R < \rho < +\infty, \mathrm{Fo} > 0; \tag{3}$$

$$V(\rho,0) = 0;$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=0} = 0;\quad \left.\frac{1}{\rho^2}\left\{\rho\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right\}\right|_{\rho=0} = 0;$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=1-0} = V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=1+0};$$

$$\left[\rho\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\Bigg|_{\rho=1-0} = \Lambda_c\left[\rho\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\Bigg|_{\rho=1+0};$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R-0} = V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R+0};$$

$$\left[\rho\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\Bigg|_{\rho=R-0} = \Lambda\left[\rho\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\Bigg|_{\rho=R+0};$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\geq 0} \in L^2[0,+\infty); V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho\geq 0} \in L^2[0,+\infty);$$

$$\zeta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\geq 0} \in L^2[1,R]; \zeta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho\in[1,R]} \in L^2[0,+\infty).$$

Математическая модель (3) представляет собой смешанную задачу для системы уравнений в частных производных второго порядка параболического типа. Теоретически эта задача может быть решена либо путем применения интегрального преобразования Лапласа по временному переменному F_O, либо путем применения сингулярного интегрального преобразования по пространственному переменному ρ. При этом следует заметить, что в первом случае мы сталкиваемся с проблематичностью перехода из пространства изображений в пространство оригиналов, характерной для задач нестационарного теплопереноса в многослойных областях, а во втором — с проблемой разработки требуемого сингулярного интегрального преобразования [14—17].

Для преодоления возникших трудностей процедуру решения смешанной задачи (3) разбиваем на два этапа. На первом этапе находим решение смешанной задачи (3) в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа с последующим его асимптотическим обращением [4]. Это позволяет при больших значениях числа Фурье оценить (с заданной степенью точности) радиус R^* границы зоны теплового возмущения. На втором этапе с использованием конечного интегрального преобразования по пространственному переменному ρ для трехслойной области завершаем решение исходной задачи.

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (3) В ПРОСТРАНСТВЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа

$$u(\rho,s) \triangleq L\left[V(\rho,\mathrm{Fo})\right]; \Phi(\rho,s) \triangleq L\left[\zeta(\rho,\mathrm{Fo})\right], \tag{4}$$

заданного парой линейных интегральных операторов [2, 3]

$$L[g] \equiv \int_0^\infty g\exp(-s\,\mathrm{Fo})d\,\mathrm{Fo};\quad L^{-1}[g] \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g\exp(s\,\mathrm{Fo})ds, \tag{5}$$

математическая модель (3) может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{d^2u(\rho,s)}{d\rho^2}-\frac{s}{\chi_c}u(\rho,s)=0,\quad 0\le\rho<1; \tag{6}$$

$$\frac{d^2u(\rho,s)}{d\rho^2}-\frac{s}{\chi}u(\rho,s)=-\frac{1}{\chi}\Phi(\rho,s),\quad 1<\rho<R; \tag{7}$$

$$\frac{d^2u(\rho,s)}{d\rho^2}-su(\rho,s)=0,\ \ R<\rho<+\infty; \tag{8}$$

$$u(\rho,s)\big|_{\rho=0}=0;\quad \frac{1}{\rho^2}\left\{\rho\frac{du(\rho,s)}{d\rho}-u(\rho,s)\right\}\Bigg|_{\rho=0}=0; \tag{9}$$

$$u(\rho,s)\big|_{\rho=1-0}=u(\rho,s)\big|_{\rho=1+0}; \tag{10}$$

$$\left[\rho\frac{du(\rho,s)}{d\rho}-u(\rho,s)\right]\Bigg|_{\rho=1-0}=\Lambda_c\left[\rho\frac{du(\rho,s)}{d\rho}-u(\rho,s)\right]\Bigg|_{\rho=1+0}; \tag{11}$$

$$u(\rho,s)\big|_{\rho=R-0}=u(\rho,s)\big|_{\rho=R+0}; \tag{12}$$

$$\left[\rho\frac{du(\rho,s)}{d\rho}-u(\rho,s)\right]\Bigg|_{\rho=R-0}=\Lambda\left[\rho\frac{d(\rho,s)}{d\rho}-u(\rho,s)\right]\Bigg|_{\rho=R+0}; \tag{13}$$

$$u(\rho,s)\big|_{s\in C}\in L^2[0,+\infty); \tag{14}$$

$$\Phi(\rho,s)\big|_{s\in C}\in L^2[1,R]. \tag{15}$$

Воспользовавшись стандартными методами [18], находим решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (6)–(8), удовлетворяющие условиям (9), (14), (15), и представляем их в виде, удобном для дальнейшего использования:

$$u(\rho,s)\big|_{0\le\rho<1}=c_1(s)\mathrm{sh}\left(\rho\sqrt{s/\chi_c}\right); \tag{16}$$

$$u(\rho,s)\big|_{1<\rho<R}=c_2(s)\exp\left[-(R-\rho)\sqrt{s/\chi}\right]+c_3(s)\exp\left[(R-\rho)\sqrt{s/\chi}\right]+\Psi(\rho,s); \tag{17}$$

$$u(\rho,s)\big|_{R<\rho<+\infty}=c_4(s)\exp\left(-(\rho-R)\sqrt{s}\right), \tag{18}$$

где изображение

$$\Psi(\rho,s)=-\frac{1}{\sqrt{\chi_s}}\int_1^\rho\Phi(x,s)\mathrm{sh}\left[(\rho-x)\sqrt{s/\chi}\right]dx, 1\le\rho\le R. \tag{19}$$

Таким образом, для завершения процедуры решения смешанной задачи (3) в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа (5) достаточно идентифицировать изображения $\{c_k(s)\}_{k=1}^{4}$.

Воспользовавшись равенствами (16)–(18) и условиями сопряжения (10)–(13), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно изображений $\{c_k(s)\}_{k=1}^{4}$:

$$c_1(s)\operatorname{sh}\left(\sqrt{s/\chi_c}\right) = c_2(s)\exp\left[-(R-1)\sqrt{s/\chi}\right] + c_3(s)\exp\left[(R-1)\sqrt{s/\chi}\right]; \tag{20}$$

$$\begin{gathered} c_1(s)\frac{1}{\Lambda_c}\sqrt{\frac{\chi}{s}}\left\{\sqrt{\frac{s}{\chi_c}}\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{s}{\chi_c}}\right) + (\Lambda_c - 1)\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{s}{\chi_c}}\right)\right\} = \\ = c_2(s)\exp\left[-(R-1)\sqrt{s/\chi}\right] - c_3(s)\exp\left[(R-1)\sqrt{s/\chi}\right]; \end{gathered} \tag{21}$$

$$c_4(s) = c_2(s) + c_3(s) + \Psi(R,s); \tag{22}$$

$$c_4(s)\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\chi}{s}}\left\{\Lambda R\sqrt{s} - (\Lambda - 1)\right\} = c_2(s) - c_3(s) + \sqrt{\frac{\chi}{s}}\Psi'_\rho(R,s), \tag{23}$$

так как, согласно (19),

$$\Psi'_\rho(\rho,s) = -\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int_1^\rho \Phi(x,s)\operatorname{ch}\left[\frac{\rho - x}{\sqrt{\chi}}\sqrt{s}\right]dx \tag{24}$$

и, как следствие, $\Psi(1,s) \equiv 0 \equiv \Psi'_\rho(1,s)$. При этом путем очевидных линейных преобразований совокупность уравнений (22), (23) может быть трансформирована к соответствующему эквивалентному виду:

$$\begin{gathered} c_k(s) = \alpha_k(s)c_4(s) + F_k(s),\ k \in \{2,3\}; \\ \alpha_k(s) = \frac{1}{2R\sqrt{s}}\left\{R\left[1 + (-1)^k\Lambda\sqrt{\chi}\right]\sqrt{s} - (-1)^k(\Lambda - 1)\sqrt{\chi}\right\}; \\ F_k(s) = -\frac{1}{2}\left\{\Psi(R,s) + (-1)^k\sqrt{\frac{s}{\chi}}\Psi'_\rho(R,s)\right\}. \end{gathered} \tag{25}$$

Преобразовав аналогичным образом совокупность уравнений (20), (21):

$$c_k(s) = \beta_k(s)c_1(s),\ k \in \{2,3\};$$

$$\beta_k(s) = \frac{1}{2}\left\{\left[1 + (-1)^k \frac{\Lambda_c - 1}{\Lambda_c}\sqrt{\frac{\chi}{s}}\right]\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{s}{\chi_c}}\right) + (-1)^k \frac{1}{\Lambda_c}\sqrt{\frac{\chi}{\chi_c}}\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{s}{\chi_c}}\right)\right\}\times$$
$$\times\exp\left[(-1)^k(R-1)\sqrt{\frac{s}{\chi_c}}\right] \qquad (26)$$

и сопоставив результаты, представленные равенствами (25), (26), приходим к системе двух линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно изображений $c_1(s)$ и $c_4(s)$:

$$\beta_2(s)c_1(s) - \alpha_2(s)c_4(s) = F_1(s);\ \beta_3(s)c_1(s) - \alpha_3(s)c_4(s) = F_3(s),$$

решение которой имеет вид:

$$c_1(s) = \frac{\alpha_2(s)F_3(s) - \alpha_3(s)F_2(s)}{\alpha_2(s)\beta_3(s) - \alpha_3(s)\beta_2(s)};\ c_4(s) = \frac{\beta_2(s)F_3(s) - \beta_3(s)F_2(s)}{\alpha_2(s)\beta_3(s) - \alpha_3(s)\beta_2(s)}, \qquad (27)$$

где изображения $\alpha_k(s)$, $\beta_k(s)$ и $F_k(s)$ определены равенствами (25) и (26) $\forall k \in \{2,3\}$.

Таким образом, решение исходной смешанной задачи (3) для системы уравнений в частных производных второго порядка параболического типа в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа (5) в обозначениях (4) полностью определено равенствами (16)—(19), (24)—(27). При этом, как уже отмечалось ранее, непосредственный переход из пространства изображений в пространство оригиналов весьма проблематичен. Но для достижения основной цели проведенных исследований, полученный результат может быть использован для оценки радиуса R^* границы зоны теплового возмущения при больших значениях числа Фурье.

Действительно, для оценки протяженности зоны теплового возмущения можно воспользоваться асимптотическим обращением интегрального преобразования Лапласа [4]:

$$V(\rho,\mathrm{Fo}) = L^{-1}\left[u(\rho,s)\right] \sim \frac{1}{2\mathrm{Fo}}V\left(\rho,\frac{1}{2\mathrm{Fo}}\right),$$

а оценку радиуса R^* границы этой зоны при больших значениях числа Фурье с учетом равенства (2) определять из условия

$$\theta'_\rho(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\rho > R} \sim 0.$$

Не останавливаясь на специфике процедуры определения величины R^*, далее радиус границы зоны теплового возмущения считаем известным.

С учетом высказанных предположений исходная математическая модель (3) трансформируется к виду:

$$\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \chi_c \frac{\partial^2 V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho^2}, 0 \le \rho < 1, \mathrm{Fo}_o > 0;$$

$$\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \chi \frac{\partial^2 V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho^2} + \zeta(\rho,\mathrm{Fo}), 1 < \rho < R, \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 V(\rho,\mathrm{Fo})\mathrm{Fo}}{\partial \rho^2}, R < \rho < R^*, \mathrm{Fo} > 0;$$

$$V(\rho,0) = 0; \tag{28}$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\rho = 0} = 0; \quad \frac{1}{\rho^2}\left\{\rho \frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right\}\Bigg|_{\rho = 0} = 0;$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\rho = 1-0} = V(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\rho = 1+0};$$

$$\left[\rho \frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\Bigg|_{\rho = 1-0} = \Lambda_c \left[\rho \frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\Bigg|_{\rho = 1+0};$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\rho = R-0} = V(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\rho = R+0};$$

$$\left[\rho \frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\Bigg|_{\rho = R-0} = \Lambda \left[\rho \frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\Bigg|_{\rho = R+0};$$

$$\left[\rho \frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho} - V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\Bigg|_{\rho = R^*} = 0;$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\mathrm{Fo} \ge 0} \in L^2\left[0,R^*\right]; V(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\rho\in\left[0,R^*\right]} \in L^2\left[0,+\infty\right);$$

$$\zeta(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\mathrm{Fo} \ge 0} \in L^2\left[1,R\right]; \zeta(\rho,\mathrm{Fo})\Big|_{\rho\in[1,R]} \in L^2\left[0,+\infty\right).$$

Для решения смешанной задачи, представленной математической моделью (28), обратимся к конечному интегральному преобразованию для трехслойной области, применяемому по пространственному переменному $\rho = [0, R^*]$.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОМУ ПЕРЕМЕННОМУ ρ

Согласно представленной математической модели (28) и общей теории интегральных преобразований [19, 20], весовая функция $\gamma(\rho)$ искомого интегрального преобразования определена равенством:

$$\gamma(\rho) = \begin{Bmatrix} \chi_c^{-1}, & 0 \le \rho < 1 \\ \chi^{-1}, & 1 < \rho < R \\ 1, & R < \rho < R^* \end{Bmatrix}, \tag{29}$$

а его ядро $K(\eta_n, \rho)$ и спектр собственных значений $\{\eta_n\}_{n \ge 1}$ определены соответствующей краевой задачей:

$$\frac{d^2 K(\eta_n, \rho)}{d\rho^2} + \frac{\eta_n^2}{\chi_c} K(\eta_n, \rho) = 0, \quad 0 \le \rho < 1; \tag{30}$$

$$\frac{d^2 K(\eta_n, \rho)}{d\rho^2} + \frac{\eta_n^2}{\chi} K(\eta_n, \rho) = 0, \quad 1 < \rho < R; \tag{31}$$

$$\frac{d^2 K(\eta_n, \rho)}{d\rho^2} + \eta_n^2 K(\eta_n, \rho) = 0, \quad R < \rho < R^*; \tag{32}$$

$$K(\eta_n, \rho)\Big|_{\rho=0} = 0; \tag{33}$$

$$K(\eta_n, \rho)\Big|_{\rho=1-0} = K(\eta_n, \rho)\Big|_{\rho=1+0}; \tag{34}$$

$$\left[\rho \frac{dK(\eta_n, \rho)}{d\rho} - K(\eta_n, \rho)\right]_{\rho=1-0} = \Lambda_c \left[\rho \frac{dK(\eta_n, \rho)}{d\rho} - K(\eta_n, \rho)\right]_{\rho=1+0}; \tag{35}$$

$$K(\eta_n, \rho)\Big|_{\rho=R-0} = K(\eta_n, \rho)\Big|_{\rho=R+0}; \tag{36}$$

$$\left[\rho \frac{dK(\eta_n, \rho)}{d\rho} - K(\eta_n, \rho)\right]_{\rho=R-0} = \Lambda \left[\rho \frac{dK(\eta_n, \rho)}{d\rho} - K(\eta_n, \rho)\right]_{\rho=R+0}; \tag{37}$$

$$\left[\rho \frac{dK(\eta_n, \rho)}{d\rho} - K(\eta_n, \rho)\right]_{\rho=R^*} = 0. \tag{38}$$

Воспользовавшись стандартными методами [18], находим частное решение уравнения (30), удовлетворяющее условию (33):

$$K(\eta_n, \rho)\Big|_{0 \le \rho < 1} = c_1(\eta_n) \sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi_c}} \rho\right] \tag{39}$$

и общие решения уравнений (31) и (32) соответственно:

$$K(\eta_n,\rho)\Big|_{1<\rho<R} = c_2(\eta_n)\cos\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-\rho)\right] + c_3(\eta_n)\sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-\rho)\right]; \tag{40}$$

$$K(\eta_n,\rho)\Big|_{R<\rho<R^*} = c_4(\eta_n)\cos\left[\eta_n(\rho-R)\right] + c_5(\eta_n)\sin\left[\eta_n(\rho-R)\right]. \tag{41}$$

При этом, согласно представлениям (39) и (40) ядра искомого интегрального преобразования и условиям сопряжения (34) и (35) должны выполняться равенства:

$$c_1(\eta_n)\sin\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}\right) = c_2(\eta_n)\cos\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right] + c_3(\eta_n)\sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right];$$

$$c_1(\eta_n)\left\{\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi_c}}\cos\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi_c}}\right) + (\Lambda_c-1)\sin\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi_c}}\right)\right\} =$$

$$= \Lambda_c\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}\left\{c_2(\eta_n)\sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right] - c_3(\eta_n)\cos\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right]\right\},$$

которые можно интерпретировать как систему двух линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $c_2(\eta_\mathrm{n})$ и $c_3(\eta_\mathrm{n})$. Разрешив эту систему, получаем:

$$\begin{gathered}
c_k(\eta_n) = d_k(\eta_n)c_1(\eta_n), \quad \forall k \in \{2,3\}; \\
d_2(\eta_n) = h_2(\eta_n)\cos\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right] + h_3(\eta_n)\sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right]; \\
d_3(\eta_n) = h_2(\eta_n)\sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right] - h_3(\eta_n)\cos\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right]; \\
h_2(\eta_n) = \sin\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi_c}}\right); \\
h_3(\eta_n) = \frac{\sqrt{\chi}}{\eta_n\Lambda_c}\left\{\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi_c}}\cos\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi_c}}\right) + (\Lambda_c-1)\sin\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi_c}}\right)\right\}.
\end{gathered} \tag{42}$$

Далее, согласно представлениям (40) и (41) ядра искомого интегрального преобразования и условиям сопряжения (36), (37) должны выполняться равенства:

$$c_2(\eta_n) = c_4(\eta_n);$$

$$-R\left(\eta_n/\sqrt{\chi}\right)c_3(\eta_n) + (\Lambda-1)c_2(\eta_n) = \Lambda R\eta_n c_5(\eta_n),$$

которые с учетом (42) трансформируются к следующим:

$$c_4(\eta_n) = d_2(\eta_n)c_1(\eta_n); \quad c_5(\eta_n) = d_5(\eta_n)c_1(\eta_n), \tag{43}$$

где

$$d_5(\eta_n) = \frac{1}{\Lambda R\eta_n}\left\{(\Lambda - 1)d_2(\eta_n) - \frac{R\eta_n}{\sqrt{\chi}}d_3(\eta_n)\right\}. \tag{44}$$

Таким образом, согласно (39)–(44), для завершения процедуры идентификации искомого интегрального преобразования осталось идентифицировать спектр $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ его собственных значений и определить $c_1(\eta_n), \forall n \geq 1$.

Для идентификации спектра собственных значений $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ воспользуемся представлением (41) ядра искомого интегрального преобразования, однородным краевым условием (38) и равенствами (43). В результате приходим к уравнению для определения собственных значений $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$:

$$\begin{gathered} d_2(\eta_n)\left\{\cos\left[\eta_n\left(R^* - R\right)\right] + \eta_n R^* \sin\left[\eta_n\left(R^* - R\right)\right]\right\} = \\ = d_5(\eta_n)\left\{\eta_n R^* \cos\left[\eta_n\left(R^* - R\right)\right] - \sin\left[\eta_n\left(R^* - R\right)\right]\right\}, \end{gathered} \tag{45}$$

где коэффициент $d_5(\eta_n)$ определен равенством (44), а $d_2(\eta_n)$ – равенством, входящим в систему (42).

$c_1(\eta_n)$ является коэффициентом пропорциональности для ядра искомого интегрального преобразования, что непосредственно следует из результатов, представленных равенствами (39)−(43). А так как согласно общей теории интегральных преобразований [19, 20] ядро $K(\eta_n, \rho)$ должно удовлетворять условиям нормировки с весовой функцией $\gamma(\rho)$, определенной равенством (29), то с учетом (39)–(43) приходим к цепочке равенств:

$$\begin{gathered} 1 \equiv \left\|K(\eta_n,\rho)\right\|^2 = \int\limits_0^{R^*}\gamma(\rho)K^2(\eta_n,\rho)d\rho = \\ = c_1^2(\eta_n)\left\{\frac{1}{\chi_c}\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi_c}}\rho\right)d\rho + \frac{1}{\chi}\int\limits_1^R\left(d_2(\eta_n)\cos\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-\rho)\right] + \right.\right. \\ \left. + d_3(\eta_n)\sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-\rho)\right]\right)^2 d\rho + \\ \left. + \int\limits_R^{R^*}\left(d_2(\eta_n)\cos\left[\eta_n(\rho - R)\right] + d_5(\eta_n)\sin\left[\eta_n(\rho - R)\right]\right)^2 d\rho\right\}, \end{gathered}$$

воспользовавшись которой и определяем нормирующий множитель

$$c_1(\eta_n)=\left\{\frac{1}{2\chi_c}\left[1-\frac{\sqrt{\chi_c}}{2\eta_n}\sin\left(\frac{2\eta_n}{\sqrt{\chi_c}}\right)\right]+d_2^2(\eta_n)\left[\frac{R-1}{2\chi}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4\eta_n\sqrt{\chi}}\sin\left(\frac{2\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right)\right]+d_2(\eta_n)d_3(\eta_n)\frac{1}{2\eta_n\sqrt{\chi}}\Big[1-$$
$$\left.-\cos\left(\frac{2\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right)\right]+d_3^2(\eta_n)\left[\frac{R-1}{2\chi}-\frac{1}{4\eta_n\sqrt{\chi}}\sin\left(\frac{2\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R-1)\right)\right]+ \tag{46}$$
$$+d_2^2(\eta_n)\left[\frac{R^*-R}{2}-\frac{1}{4\eta_n}\sin\left(2\eta_n\left(R^*-R\right)\right)\right]+d_2(\eta_n)d_5(\eta_n)\frac{1}{2\eta_n}\Big[1-$$
$$\left.\left.-\cos(2\eta_n\left(R^*-R\right))\right]+d_5^2(\eta_n)\left[\frac{R^*-R}{2}-\frac{1}{4\eta_n}\sin\left(2\eta_n\left(R^*-R\right)\right)\right]\right\}^{-1/2}.$$

Таким образом, ядро $K(\eta_n, \rho)$ искомого интегрального преобразования по пространственному переменному $\rho \in [0, R^*]$ полностью определено равенствами (39)–(44), (46), спектр его собственных значений $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ – уравнением (45), а весовая функция $\gamma(\rho)$ – равенством (29).

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (28)

Применив к математической модели (28) разработанное конечное интегральное преобразование по пространственному переменному $\rho \in [0, R^*]$ и, полагая

$$W_n(\mathrm{Fo}) \triangleq \int_0^{R^*} V(\rho,\mathrm{Fo})\gamma(\rho)K(\eta_n,\rho)d\rho;$$
$$\Phi_n(\mathrm{Fo}) \triangleq \int_0^{R^*}\zeta(\rho,\mathrm{Fo})\{J(R-\rho)-J(1-\rho)\}\gamma(\rho)K(\eta_n,\rho)d\rho \equiv \tag{47}$$
$$\equiv \frac{1}{\chi}\int_1^R \zeta(\rho,\mathrm{Fo})K(\eta_n,\rho)d\rho,$$

где $J(g)$ – единичная функция [2], приходим к задаче Коши относительно изображения $W_n(\mathrm{F_O})$ оригинала $V(\rho, \mathrm{F_O})$:

$$\frac{dW_n(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}+\eta_n^2W_n(\mathrm{Fo})=\Phi_n(\mathrm{Fo}),\quad \mathrm{Fo}>0;$$
$$W_n(0)=0. \tag{48}$$

Решение задачи Коши (48) может быть найдено с использованием стандартных методов [18] и представлено в виде, удобном для проведения вычислительных экспериментов:

$$W_n\left(\mathrm{Fo}\right)=\int_0^{Fo}\Phi_n\left(\tau\right)\exp\left[-\eta_n^2\left(\mathrm{Fo}-\tau\right)\right]d\tau,\quad \mathrm{Fo}\geq 0; \tag{49}$$

Таким образом, согласно общей теории интегральных преобразований [19, 20], решение смешанной задачи, представленной математической моделью (28), может быть записано в следующем виде:

$$V\left(\acute{A},\mathrm{Fo}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n\left(\mathrm{Fo}\right)K\left(\eta_n,\rho\right),\ 0\leq\rho\leq R^*,\quad \mathrm{Fo}\geq 0,$$

где ядро $K(\eta_n, \rho)$ использованного интегрального преобразования определено равенствами (39)–(44), (46), спектр его собственных значений $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$– уравнением (46), весовая функция $\gamma(\rho)$ – равенством (29), а изображение $W_n(\mathrm{Fo})$– равенствами (49) и (47).

Теоретический и значимый практический интерес представляет режим воздействия на объект исследований потока излучения постоянной плотности мощности $f\left(\rho,\mathrm{Fo}\right)=f_0-\mathrm{const}$. В этой простейшей ситуации функция

$$W_n\left(\mathrm{Fo}\right)=\Lambda f_0\eta_n^{-2}\left[1-\exp\left(-\eta_n^2\mathrm{Fo}\right)\right]K\left(\eta_n,\rho\right)\rho d\rho,\ \mathrm{Fo}\geq 0. \tag{50}$$

Температурное поле трехслойной области в этом случае определяется как

$$\theta\left(\rho,\mathrm{Fo}\right)=\rho^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}W_n\left(\mathrm{Fo}\right)K\left(\eta_n,\rho\right),\ 0\leq\rho\leq R^*,\quad \mathrm{Fo}\geq 0;$$

$$\theta\left(R,\mathrm{Fo}\right)=R^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}W_n\left(\mathrm{Fo}\right)K\left(\eta_n,R\right)=R^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}W_n\left(\mathrm{Fo}\right)d_2\left(\eta_n\right)c_1\left(\eta_n\right),\quad \mathrm{Fo}\geq 0,$$

где функция $W_n(\mathrm{F_O})$ определена равенством (5), $d_2(\eta_n)$ – вторым равенством в (42), $c_1(\eta_n)$ – равенством (46).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель процесса теплопереноса в изотропном твердом теле с поглощающим проникающее излучение включением в виде шарового слоя. Подобные задачи встречаются для разного рода технических устройств, которые используются в аэродинамике, физике плазмы, астрофизике и других отраслях науки и техники. Разработан аналитический метод решения соответствующей задачи нестационарной теплопроводности, включающий две основные процедуры. Первая из них сводится к нахождению решения рассматриваемой задачи в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа с последующим его асимптотическим обращением, что позволяет при больших значениях числа Фурье оценить радиус границы зоны теплового возмущения. Завершающая процедура построения аналитически замкнутого решения исходной задачи основана на применении разработанного в работе конечного интегрального преобразования по пространственному переменному для трехслойной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
4. *Пудовкин М.А., Волков И.К.* Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.
5. *Формалёв В.Ф.* Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.
6. *Ассовский И.Г.* Физика горения и внутренняя баллистика. М.: Наука, 2005. 357 с.
7. *Чернай А.В.* О механизме зажигания конденсированных вторичных ВВ лазерным импульсом // Физика горения и взрыва. 1996. Т. 32. № 1. С. 11–19.
8. *Буркина Р.С., Морозова Е.Ю., Ципилев В.П.* Инициирование реакционно-способного вещества потоком излучения при его поглощении оптическими неоднородностями вещества // Физика горения и взрыва. 2011. Т. 47. № 5. С. 95–105.
9. *Адуев Б.П., Ананьева М.В., Звеков А.А., Каленский А.В., Кригер В.Г., Никитин А.П.* Микроочаговая модель лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов с учетом плавления // Физика горения и взрыва. 2014. Т. 50. № 6. С. 92–99.
10. *Каленский А.В., Звеков А.А., Никитин А.П.* Микроочаговая модель с учетом зависимости коэффициента эффективности поглощения лазерного импульса от температуры // Химическая физика. 2017. Т. 36. № 4. С. 43–49.
11. *Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.* Температурное поле прозрачного для излучения твердого тела с поглощающим сферическим включением // Тепловые процессы в технике. 2018. Т. 10. № 5–6. С. 256–264.
12. *Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.* Процессы теплопереноса в твердом теле с поглощающим включением при воздействии лазерного излучения // Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11. № 5. С. 216–221.
13. *Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.* Процессы теплопереноса в твердом теле с поглощающим проникающее излучение включением в виде шарового слоя // Тепловые процессы в технике. 2020. Т. 12. № 1. С. 18–24.
14. *Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С.* Температурное поле многослойного полупространства при неидеальном тепловом контакте между слоями // Изв. РАН. Энергетика. 2010. № 3. С. 83–91.
15. *Аттетков А.В., Волков И.К.* Сингулярные интегральные преобразования как метод решения одного класса задач нестационарной теплопроводности // Изв. РАН. Энергетика. 2016. № 1. С. 148–156.

16. *Карташов Э.М.* Интегральные преобразования для обобщенного уравнения нестационарной теплопроводности в частично ограниченной области // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 6. С. 1347–1355.

17. *Аттетков А.В., Волков И.К.* Теплоперенос в разделительной системе двух различных сред, обладающей активной теплозащитой, в условиях локального теплового воздействия // Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11. № 3. С. 124–138.

18. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

19. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 708 с.

20. *Волков И.К., Канатников А.Н.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. 228 с.

Basic Model of Heat Transfer Process in A Radiation-Transparent Solid Body with Absorbing Spherical Layer

A. V. Attetkov[a, *], A. V. Kotovich[a, **]

[a] *Bauman Moscow State Technical University (National research university), Moscow, Russia*

[*] *e-mail: fn2@bmstu.ru*

[**] *e-mail: shurik.kot@gmail.com*

Theoretical studies on the problem of laser initiation of explosive decomposition in heterogeneous energetic materials place significant importance on the mathematical model of the heat transfer process in an isotropic solid body containing an absorbing inclusion in the form of a spherical layer. Difficulties are known to arise when seeking an analytical solution to the corresponding problem of non-stationary heat conduction, both through the application of Laplace's integral transformation with respect to the time variable and singular integral transformation with respect to the spatial variable. This explains the absence of an analytical solution for the considered problem using current methods.

The task of determining the temperature field in an isotropic solid body with an absorbing penetrating radiation inclusion in the form of a spherical layer is formulated. The implemented mathematical model of the heat transfer process represents a mixed problem for a system of three second-order partial differential equations of the parabolic type in the presence of a non-stationary heat source in the system. An analytical method for solving the problem is proposed, which consists of two main stages.

The first stage involves finding the solution to the problem in the space of the Laplace integral transformation image, followed by its asymptotic expansion. The procedure used allows for the estimation of the extent and radius of the boundary of the thermal disturbance zone for large values of the Fourier number. The second stage, based on the application of the developed finite integral transformation with respect to the spatial variable for a three-layer region, completes the procedure of constructing an analytically closed solution to the original problem of non-stationary heat conduction.

Keywords: isotropic solid body, laser radiation, absorbing inclusion in the form of a spherical layer, temperature field, integral transformations