
УДК 539.3

МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕПЛООВОГО УДАРА ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

© 2024 г. Э. М. Карташов^{1, 2, *}, С. С. Крылов²

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “МИРЭА – Российский технологический университет”, Москва, Россия

²Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Москва, Россия

*e-mail: professor.kartashov@gmail.com

Поступила в редакцию 16.10.2024 г.

После доработки 08.11.2024 г.

Принята к публикации 11.11.2024 г.

Рассмотрены модельные представления теории теплового удара вязкоупругих тел на основе двух различных подходов. В первом подходе, основанном на введении девиаторов напряжения и деформации с использованием линейных реологических моделей Максвелла и Кельвина, предлагаются новые интегральные и дифференциальные соотношения, включающие одновременно динамические и квазистатические модели для вязкоупругих и упругих сред, обобщающие результаты предыдущих исследований. Предложенные определяющие соотношения новой формы применимы для описания тепловой реакции тел канонической формы, ограниченных границами прямолинейной формы в декартовых координатах, и распространены на случай криволинейных границ в цилиндрических и сферических координатах. Во втором подходе описана упруго-вязкоупругая аналогия, состоящая в том, что исходная задача о температурных напряжениях вязкоупругого тела может быть сведена к эквивалентной задаче термоупругости путем замены в операционном (по Лапласу) решении термоупругой задачи модуля сдвига и коэффициента Пуассона на их изображения как в модели Максвелла, так и в модели Кельвина. Показано, что после выполнения обратного преобразования находится аналитическое решение задачи для термовязкоупругой среды. Приведен иллюстративный пример и проанализированы отличия в термической реакции на внезапный нагрев упругой и вязкоупругой среды.

Ключевые слова: тепловой удар, термоупругость, вязкоупругие тела, реологические модели

DOI: 10.31857/S0002331024050052

ВВЕДЕНИЕ

Исследование процессов теплового разрушения материалов, вызванных взаимодействием интенсивных тепловых потоков с твердыми телами, составляет содержание проблемы термической прочности, актуальность которой возросла в последнее

десятилетие в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в технологических операциях. Быстрый нагрев вещества происходит при обработке в инфракрасных печах, плазмохимических реакциях, гелиоустановках. Новые технологические приемы в машиностроении и близких областях основаны на интенсивном нагреве материалов плазменными потоками, лазерными или электронными лучами. Мощные радиационные излучатели используются для термической закалки и упрочнения поверхности изделий. Интенсивному тепловому воздействию подвергаются поверхности авиационно-космических аппаратов и пусковых установок.

Накоплено значительное количество публикаций, описывающих эти процессы в ядерной энергетике, в авиационном, ракетостроении и космической технике, в турбиностроении и эксплуатации турбинных установок и т.д. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в [1–4]. Проведенные исследования указанной проблемы выполнены, в основном, для большинства технически важных материалов, подчиняющихся закону Гука. В соответствующих математических моделях в терминах динамических, квазистатических или статических задач термоупругости материал считается однородным и изотропным, термомеханические коэффициенты являются постоянными величинами, не зависящими от температуры, и рассматриваемые разности температур не слишком велики, то есть температура не превышает некоторого предельного значения, и напряжения не достигают границы текучести. Считается [5, 6], что при относительно низком уровне температур и напряжений поведение широкого класса материалов находится в хорошем соответствии с теорией термоупругости.

Определяющие соотношения этой теории в рамках несвязанной термоупругости относительно компонент тензоров напряжения $\sigma_{ij}(M, t)$, деформации $\varepsilon_{ij}(M, t)$, вектора перемещения $U_i(M, t)$ в области $M(x, y, z) \in D, t > 0$ соответственно геометрии и размерам твердого тела, в котором изучается процесс термоупругости, удовлетворяют уравнениям движения (без учета объемных сил), геометрическим уравнениям, физическим уравнениям (обобщенный закон Гука) в индексных обозначениях [2]

$$\sigma_{ij,j}(M, t) = \rho \ddot{U}_i(M, t); \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1}{2} [U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)]; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu \varepsilon_{ij}(M, t) + \{ \lambda e(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T [T(M, t) - T_0] \} \delta_{ij}, \quad (3)$$

где $i, j = x, y, z$; ρ – плотность; $\mu = G$, $\lambda = 2G\nu/(1 - 2\nu)$ – изотермические коэффициенты Ламе, при этом $2G/(1 + \nu) = E$ – модуль Юнга; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; σ_{ij} – символ Кронекера; $e(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t) = di v [\bar{U}(M, t)]$ – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\sigma(M, t) = \sigma_{ij}(M, t)$ соотношением

$$e(M, t) = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0], \quad (4)$$

вытекающим из (3). К соотношениям (1)–(4) следует также присоединить граничные условия $\sum_j \sigma_{ji}(M, t)n_j = f_i(M, t), M \in S, t > 0$ на той части поверхности S (ограничивающей область D), где заданы напряжения и $U_i(M, t) = \varphi_i(M, t), M \in S, t > 0$ на той части поверхности, где заданы перемещения; для частично ограниченной области следует добавить условие ограниченности в D при $t \geq 0$ всех функций, входящих в (1)–(4). Термонапряженное состояние области D при $t > 0$ может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу S , создающих термический удар. К ним можно отнести следующие наиболее распространенные на практике случаи [7]: температурный нагрев $T(M, t) = T_c, M \in S, t > 0 (T_c > T_0)$; тепловой нагрев $\frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = -\frac{1}{\lambda_T} q_0, M \in S, t > 0$ (λ_T – теплопроводность материала; q_0 – величина теплового потока); нагрев средой $\frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = h[T(M, t) - T_c], M \in S, t > 0$ (h – относительный коэффициент теплообмена; T_c – температура окружающей среды ($T_c = T_0$)). В равной степени могут быть рассмотрены и случаи резкого охлаждения.

При повышенных температурах и более высоком уровне напряжений понятие об упругом теле становится недостаточным: почти у всех материалов обнаруживается более или менее отчетливо выраженное явление вязкого течения. В этом случае поведение реального тела принято называть вязкоупругим, так как тело одновременно проявляет упругие и вязкие свойства. Чтобы математически описать неупругое поведение тела при заданных условиях нагрева и напряжения, необходимо соответствующим образом обобщить соотношения между напряжениями и деформациями в (1)–(4).

Эти обобщения ведутся по разным направлениям [5], хотя четко разграничить их не всегда возможно. Наиболее общие подходы к проблеме основываются на представлениях и методах физики твердого тела. Чтобы получить сведения о механических характеристиках материала, рассматривается его микроструктура (кристаллическая, поликристаллическая, аморфная). Другой подход состоит в том, что, отвлекаясь от особенностей микроструктуры материала, необходимо рассматривать тело как сплошное и искать форму соотношений между напряжениями и деформациями, исходя из общих принципов механики и термодинамики сплошных сред. Наконец, наиболее формальный способ анализа заключается в том, что выбираются некоторые простые формы соотношений между напряжениями, описывающие такие типы неупругих явлений, как ползучесть, релаксация напряжений, пластическое течение, упрочнение. Реологические модели, которые учитывают одновременно протекающие процессы упругого деформирования и вязкого течения, благодаря достаточной простоте принятых соотношений между напряжениями и деформациями дают возможность математически проанализировать, как будут вести себя реальные тела в различных условиях нагружения. В этом отношении учет реологических эффектов

имеет большое значение при проектировании элементов конструкций, подвергающихся воздействию высоких температур.

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Выпишем все необходимые соотношения для реологических законов, связывающих напряжения $\sigma_{ij}(M, t)$ и деформации $\varepsilon_{ij}(M, t)$ ($i, j = x, y, z$). Для этого введем девиатор напряжений $s_{ij}(M, t)$ и девиатор деформаций $e_{ij}(M, t)$ соотношениями

$$s_{ij}(M, t) = \sigma_{ij}(M, t) - \sigma^*(M, t)\delta_{ij}; \quad (5)$$

$$e_{ij}(M, t) = \varepsilon_{ij}(M, t) - \varepsilon^*(M, t)\delta_{ij}, \quad (6)$$

где σ^* и ε^* – среднее нормальное напряжение и среднее удлинение:

$$\sigma^*(M, t) = \frac{1}{3} \sum_i \sigma_{ii}(M, t); \quad \varepsilon^*(M, t) = \frac{1}{3} \sum_i \varepsilon_{ii}(M, t). \quad (7)$$

При помощи этих девиаторов соотношения (1)–(2) можно записать в виде:

$$s_{ij}(M, t) = 2Ge_{ij}(M, t), \quad (8)$$

$$\varepsilon^*(M, t) = \frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)} \sigma^*(M, t) + \alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (9)$$

Эти равенства описывают поведение линейной упругой среды. Если к соотношениям закона Гука добавить слагаемое, выражающее ньютонов закон вязкости (последовательное или параллельное соединение пружины и вязкого сопротивления [2]), то полученные зависимости будут приводить к среде Максвелла

$$\frac{\partial s_{ij}(M, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_p} s_{ij}(M, t) = 2G \frac{\partial e_{ij}(M, t)}{\partial t} \quad (10)$$

и к среде Кельвина

$$s_{ij}(M, t) = 2G \left[e_{ij}(M, t) + \tau_p \frac{\partial e_{ij}(M, t)}{\partial t} \right]. \quad (11)$$

При этом соотношение (9) остается без изменения. Последнее означает, что при гидростатическом сжатии или растяжении тело ведет себя как вполне упругое. Постоянная $\tau_p = \eta/G$ носит название время релаксации в (10) и время запаздывания в (11), η – вязкость материала. Разумеется, поведение материалов на практике сложнее случаев (10)–(11), однако, если основываться на применении простейших моделей, то для металлов при высоких температурах и для полимеров, сочетающих процессы упругого деформирования и вязкого течения можно использовать схему Максвелла, а для материалов с внутренним трением при изучении затухающих колебаний – схему Кельвина. Заметим, что при $\tau_p = 0$ ($\eta = \infty$) соотношение (10) дает среду Гука; при $\tau_p = 0$ ($\eta = 0$) в (11) закон Кельвина сводится к зависимости (8).

НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ
 ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Приведенные соотношения, записанные в декартовых координатах, могут быть использованы для описания термической реакции вязкоупругих тел канонической формы (бесконечная пластина; полупространство, ограниченное плоской поверхностью и др.) при заданных условиях нагрева (или охлаждения) в рамках соответствующей краевой задачи нестационарной теплопроводности. Для этого на начальном этапе необходимо получить дифференциальное уравнение динамической термовязкоупругости. В качестве иллюстрации этого утверждения рассмотрим случай одномерного движения, то есть вязкоупругое полупространство $z \geq l$ температуры $T(z, t)$, граница которого свободна от напряжений. При этом $U_x = U_y = 0$, $U_z = U_z(z, t)$, $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 0$; $e_{zz} = (2/3)\epsilon_{zz}$; напряжения $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$ для $i = j$, $\sigma_{ij} = 0$ для $i \neq j (i, j = x, y, z)$.

Имеем далее:

$$s_{zz}(z, t) = \sigma_{zz}(z, t) - \sigma^*(z, t); \tag{12}$$

$$\sigma^*(z, t) = \frac{E}{3(1-2\nu)} \epsilon_{zz}(z, t) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha_T [T(z, t) - T_0]; \tag{13}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial s_{zz}(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_p} s_{zz}(z, t) &= \frac{4G}{3} \frac{\partial \epsilon_{zz}(z, t)}{\partial t}; \quad (t > 0) \\ s_{zz}(z, t)|_{t=0} &= 0; \end{aligned} \right\}; \tag{14}$$

$$\epsilon_{zz}(z, t) = \frac{\partial U_z(z, t)}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}(z, t)}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial t^2}; \quad (z > l; t > 0)$$

или

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}(z, t)}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}(z, t)}{\partial t^2}. \quad (z > l; t > 0). \tag{15}$$

Находим решение задачи Коши (14), далее выражаем ϵ_{zz} через σ_{zz} и s_{zz} и подставляем в (15). В результате приходим к искомому уравнению динамической термовязкоупругости в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{m_1}{\nu_p^2 \tau_p} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \exp[-(m_2 / 3\tau_p)(t - \tau)] \sigma_{zz}(z, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{m_1 m_2}{\tau_p (1/\rho)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \exp[-(m_2 / 3\tau_p)(t - \tau)] \alpha_T [T(z, \tau) - T_0] d\tau, \quad z > l, t > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

где $m_1 = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)}$; $m_2 = \frac{1+\nu}{1-\nu}$; $v_p = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$ – скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. (17)

К уравнению (16) добавим краевые условия

$$\sigma_{zz}(z,t)|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad (z \geq l) \quad (18)$$

$$\sigma_{zz}(z,t)|_{z=l} = 0, t > 0, \quad (19)$$

$$|\sigma_{zz}(z,t)| < \infty, z \geq l, t \geq 0. \quad (20)$$

Температурная функция $T(z, t)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, z > l, t > 0 \\ T(z,t)|_{t=0} &= T_0, z > l, \\ \left[\gamma_1 \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} + \gamma_2 T(z,t) \right] \Big|_{z=l} &= \gamma_3 T_c, t > 0, \\ |T(z,t)| &< \infty, z \geq l, t \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

в зависимости от условий нагрева (охлаждения). В случае упругой среды время релаксации $\tau_p = \infty$ и (16) переходит в классическое уравнение динамической термоупругости [1]

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}; \quad (z > l; t > 0), \quad (22)$$

$$\sigma_{zz}(z,t)|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad (z \geq l),$$

$$\sigma_{zz}(z,t)|_{z=l} = \sigma_{zz}(z,t)|_{z=\infty} = 0; \quad (t \geq 0).$$

Обобщая, таким образом, (22) на вязкоупругие среды.

Аналогичным образом можно рассмотреть среду Кельвина (11) и получить уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} &= \frac{1}{m_1 \tau_p v_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{m_1 \tau_p}\right] \sigma_{zz}(z, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{m_2 \rho}{m_1 \tau_p} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{m_1 \tau_p}\right] \alpha_T [T(z, \tau) - T_0] d\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

где m_1 и m_2 указаны в (17).

Для практического применения приведенных уравнений целесообразно перейти к безразмерным переменным:

$$\xi = z / l; \tau = at / l^2; \nu_0 = \nu_p l / a; \beta_1 = \frac{2(1 - 2\nu)(l^2 / a\tau_p)}{3(1 - \nu)}; \beta_2 = \frac{(1 + \nu)(l^2 / 3a\tau_p)}{(1 - \nu)};$$

$$S_T = \alpha_T \frac{2G(1 + \nu)}{1 - 2\nu} ([S_T] = \frac{H}{m^2 \text{град}}); \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(T_c - T_0)}; W(\xi, \tau) = \frac{T(z, t) - T_0}{T_c - T_0};$$

$$\beta_1^* = \frac{2(1 - 2\nu)(a\tau_p / l^2)}{3(1 - \nu)}. \quad (24)$$

Уравнения (16) и (23) приобретают более компактный вид:

среда Максвелла

$$\nu_0^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_0^\tau \exp[-\beta_1(\tau - \tau')] [\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau') + W(\xi, \tau')] d\tau'; \quad (25)$$

среда Кельвина

$$\nu_0^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\beta_1^*} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_0^\tau \exp\left[-\frac{(\tau - \tau')}{\beta_1^*}\right] [\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau') + W(\xi, \tau')] d\tau'. \quad (26)$$

Приведенные рассуждения в равной степени распространяются и на области с криволинейной границей, например, пространство, ограниченное изнутри цилиндрической или сферической поверхностью – случаи, имеющие большую практическую ценность [4]. Для такого рода областей уравнения совместности, вытекающие из (1)–(4), необходимо записать в перемещениях [3] и затем выразить искомые компоненты тензоров напряжений и деформаций через найденные перемещения, удовлетворяющих следующим векторным уравнениям для вязкоупругих сред в терминах динамической и квазистатической термовязкоупругости. Эти соотношения имеют вид:

для среды Максвелла

$$\text{grad} [\text{div} \bar{U}(M, t)] - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 \bar{U}(M, t)}{\partial t^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T \text{grad} [T(M, t) - T_0] +$$

$$+ \frac{2(1 - 2\nu)}{3(1 - \nu)\tau_p} \int_0^t \exp\left[-\frac{(t - \tau)}{\tau_p}\right] \text{grad} [\text{div} \bar{U}(M, \tau)] d\tau; \quad (27)$$

среда Кельвина

$$\text{grad} [\text{div} \bar{U}(M, t)] - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 \bar{U}(M, t)}{\partial t^2} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T \text{grad} [T(M, t) - T_0] -$$

$$- \frac{2(1 - 2\nu)\tau_p}{(1 - \nu)} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \text{grad} [\text{div} \bar{U}(M, t)] \right\}. \quad (28)$$

Следует подчеркнуть, что при выделении в (27)–(28) необходимой компоненты вектора перемещения в любой из трех координатных систем (декартовая, цилиндрическая, сферическая) необходимо приравнять соответствующие компоненты в векторной записи левой и правой частей. В этом случае выражения (27)–(28) могут быть легко расписаны в виде новых модельных представлений в теории теплового удара вязкоупругих тел.

УПРУГО-ВЯЗКОУПРУГАЯ АНАЛОГИЯ

Рассмотрим еще один весьма эффективный подход изучаемой проблемы – так называемую упруго-вязкоупругую аналогию. Алфрей впервые заметил, что анализ поведения вязкоупругих тел может быть сведен к рассмотрению эквивалентных упругих задач для несжимаемых материалов – упруго-вязкоупругая аналогия. Воспользовавшись операционным методом (преобразованием Лапласа) Ли распространил эту аналогию на случай, когда материал сжимаем. И, наконец, на случай температурных напряжений аналогия Алфрея была обобщена Хилтоном, а аналогия – Ли–Штернбергом [2]. В последнем случае было показано, что поведение вязкоупругих тел в условиях резких температурных и механических воздействий может быть сведено к рассмотрению чисто термоупругих задач в терминах квазистатических моделей, если в операционном решении (по Лапласу $\int_0^{\infty} \dots \exp(-st) dt$) термоупругой задачи заменить модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν их изображениями

$\bar{G}(s)$ и $\bar{\nu}(s)$, вид которых определяется линейными реологическими моделями Максвелла и Кельвина, а именно:

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{2} \frac{\bar{Q}_1(s)}{\bar{P}_1(s)}, \quad \bar{\nu}(s) = \frac{\bar{K}(s) - 2\bar{G}(s)}{2[\bar{K}(s) + \bar{G}(s)]}, \quad \bar{K}(s) = \frac{\bar{Q}_2(s)}{\bar{P}_2(s)}, \quad (29)$$

$$\text{где } \bar{P}_1(s) = 1/\vartheta^* + S, \quad \bar{Q}_1(s) = 2GS, \quad \bar{P}_2(s) = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 + \nu)}, \quad \bar{Q}_2(s) = 1,$$

для среды Максвелла и

$$\bar{P}_1(s) = 1, \quad \bar{Q}_1(s) = 2GS, \quad \bar{P}_2(s) = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 + \nu)}, \quad \bar{Q}_2(s) = 1$$

для среды Кельвина. Теперь из (29) находим:

для среды Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \bar{\nu}(s) &= \frac{1 + \nu + 3\nu s \vartheta^*}{2(1 + \nu) + 3\vartheta^* s} = \nu \frac{s + 1/\vartheta_2^*}{s + 2\nu/\vartheta_2^*}, \\ \bar{G}(s) &= G \frac{s}{s + 1/\vartheta^*}, \quad \frac{1 + \bar{\nu}(s)}{1 - \bar{\nu}(s)} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{s + 1/\vartheta^*}{s + 1/\vartheta_1^*}, \\ \vartheta_1^* &= \frac{3(1 - \nu)}{1 + \nu} \vartheta^*, \quad \vartheta_2^* = \frac{3\nu}{1 + \nu} \vartheta^*; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

для среды Кельвина

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}(s) &= \frac{3v - (1 - 2v)\vartheta^* s}{3 + (1 - 2v)\vartheta^* s}, \quad \bar{G}(s) = G(1 + \vartheta^* s), \\ \frac{1 + \bar{v}(s)}{1 - \bar{v}(s)} &= \frac{1 + v}{1 - v} \cdot \frac{1}{1 + s\vartheta_1^*}, \quad \vartheta_1^* = \frac{2(1 - 2v)}{3(1 - v)}\vartheta^*. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Здесь $\vartheta^* = \tau_p / (l^2 / a)$.

Приведенные соотношения касаются квазистатических процессов, однако, по мнению [6], допускается возможность отказаться от этого ограничения и применить указанный подход к динамическим исследованиям. Ниже как раз изучается такой случай, а именно термическая реакция вязкоупругого пространства $z > l$ при резком температурном нагреве его поверхности от температуры T_0 до температуры T_c . При этом в рамках одномерного движения, рассмотренного в (22), исходную динамическую задачу в координатах (ξ, τ) (24) следует записать в виде

$$v_0^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{2G(1 + v)}{(1 - 2v)} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 1, \quad \tau > 0, \quad (32)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 1, \quad (33)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=1} = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\infty} = 0, \quad \tau \geq 0; \quad (34)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}, \quad \xi > 1, \quad \tau > 0, \quad (35)$$

$$W(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 1, \quad W(\xi, \tau) \Big|_{\xi=1} = 1, \quad \tau > 0, \quad |W| < \infty, \quad \xi \geq 1, \quad \tau \geq 0. \quad (36)$$

В (32)–(34) под $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ следует понимать $\sigma_{zz}(z, t) / [\alpha_T(T_c - T_0)]$.

Операционное решение записанной задачи имеет вид:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, s) = \frac{2G(1 + v)}{(1 - 2v)(s - v_0^2)} \left\{ \exp[-(\xi - 1)s/v_0] - \exp[-(\xi - 1)\sqrt{s}] \right\}. \quad (37)$$

Решение упругой задачи (32)–(36) относительно $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$, указанного в (24), имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= -(1/2) \left\{ \exp \left[v_0^2 \left(\tau - \frac{\xi - 1}{v_0} \right) \right] \Phi^* \left(\frac{\xi - 1}{2\sqrt{\tau}} - v_0 \sqrt{\tau} \right) \right\} + \\ &+ \exp \left[v_0^2 \left(\tau + \frac{\xi - 1}{v_0} \right) \right] \Phi^* \left(\frac{\xi - 1}{2\sqrt{\tau}} + v_0 \sqrt{\tau} \right) \} + \eta \left(\tau - \frac{\xi - 1}{v_0} \right) \exp \left[v_0^2 \left(\tau - \frac{\xi - 1}{v_0} \right) \right], \quad (38) \end{aligned}$$

где $\eta(z)$ – функция Хевисайда. Переходя к вязкоупругой области $\xi > 1$, $\tau > 0$, необходимо в изображении (37) заменить v и G на их изображения $\bar{v}(s)$ и $\bar{G}(s)$ по формулам (30)–(31). Вначале рассмотрим среду Максвелла (30).

Находим:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, s) = \frac{s + \omega_1 + \omega_2}{s^2 - (v_0^2 - \omega_1 - \omega_2)s - v_0^2 \omega_1} \times \left\{ \exp\left[-\frac{(\xi - 1)s}{v_0} \sqrt{\frac{s + \omega_1 + \omega_2}{s + \omega_1}}\right] - \exp[-(\xi - 1)\sqrt{s}] \right\}, \quad (39)$$

где

$$\omega_1 = \frac{1 + v}{3(1 - v)\vartheta^*}; \omega_2 = \frac{2(1 - 2v)}{3(1 - v)\vartheta^*}; v_0^2 = \frac{2G(1 - v)}{\rho(1 - 2v)(a^2 / l^2)}. \quad (40)$$

Нахождение оригинала изображения (39) связано с длительными преобразованиями. Остановимся лишь на принципиальных моментах.

Ключевым вопросом в (39) является нахождение оригинала $\phi(\tau)$ по изображению

$$\bar{\phi}(p) = \exp\left[-\frac{(\xi - 1)}{v_0} s\right] \sqrt{\frac{s + \omega_1 + \omega_2}{s + \omega_1}}, \quad (41)$$

что представляет самостоятельный интерес для теории операционного исчисления. Вначале найдем оригинал изображения $\bar{F}(p) = (1/p)\bar{\phi}(p)$, применяя при вы-

числении интеграла Римана–Меллина $(1/2\pi i) \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \bar{F}(p) \exp(p\tau) dp$ контур, изобра-

женный на рис. 1. Это приводит к результату

$$F(\tau) = \eta\left(\tau - \frac{\xi - 1}{v_0}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_2} \frac{\exp[-(x + \omega_1)\tau]}{x + \omega_1} \sin\left[\frac{\xi - 1}{v_0}(x + \omega_1)\sqrt{\frac{\omega_2 - x}{x}}\right] dx \right\}. \quad (42)$$

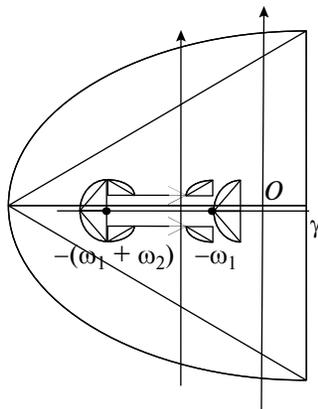


Рис. 1. Контур при нахождении оригинала изображения $\bar{F}(p)$.

Из (42) по правилу дифференцирования оригинала $\int_0^\tau \varphi(y) dy = F(\tau)$ находим искомый оригинал изображения (41):

$$\varphi(\tau) = \delta\left(\tau - \frac{\xi - 1}{v_0}\right) \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_2} \frac{\exp[-(x + \omega_1)\tau]}{x + \omega_1} \sin\left[\frac{\xi - 1}{v_0}(x + \omega_1)\sqrt{\frac{\omega_2 - x}{x}}\right] dx \right\} + \tag{43}$$

$$+ \eta\left(\tau - \frac{\xi - 1}{v_0}\right) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_2} \exp[-(x + \omega_1)\tau] \sin\left[\frac{\xi - 1}{v_0}(x + \omega_1)\sqrt{\frac{\omega_2 - x}{x}}\right] dx \right\},$$

где $\delta(z)$ – дельта – функция Дирака. Предэкспоненциальный множитель в (39) разлагается на сумму дробей

$$\left. \begin{aligned} \frac{s + \omega_1 + \omega_2}{s^2 - (v_0^2 - \omega_1 - \omega_2)s - v_0^2\omega_1} &= \sum_{i=1}^2 \bar{\Phi}_i(s) = \sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{s - \gamma_i} \\ \gamma_i &= \frac{1}{2} \left[v_0^2 - \omega_1 - \omega_2 + (-1)^{i-1} \sqrt{(v_0^2 - \omega_1 - \omega_2)^2 - 4v_0^2\omega_1} \right]; \quad A_i = \frac{\gamma_1 + \omega_1 + \omega_2}{(-1)^{i-1}(\gamma_1 - \gamma_2)}. \end{aligned} \right\} \tag{44}$$

Таким образом, вся необходимая информация для записи оригинала выражения (39) получена. Находим:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \eta\left(\tau - \frac{\xi - 1}{v_0}\right) \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \tag{45}$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\left\{ (1/2) A_1 \sum_{i=1}^2 \exp\left[\gamma_i \tau + (-1)^i (\xi - 1) \sqrt{\gamma_i}\right] \Phi^*\left(\frac{\xi - 1}{2\sqrt{\tau}} + (-1)^i \sqrt{\gamma_i} \tau\right) - \frac{A_2}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x + \xi - 1)^2}{4\tau}\right] \cos\sqrt{\gamma_2} x dx \right\}, \tag{46}$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \int_0^\tau \varphi_1(\tau - \tau') \varphi(\tau') d\tau' + \int_0^\tau \varphi_2(\tau - \tau') \varphi(\tau') d\tau', \tag{47}$$

где $\Phi^*(z) = 1 - (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy$ – функция Крампа.

Рассмотрим теперь среду Кельвина. Соотношения (31) дают для этого случая:

$$\bar{v}(s) = (v_0^2 / \omega_1)(s + \omega_1), \omega_1 = \frac{3(1 - \nu)}{2(1 - 2\nu)\delta^*}. \tag{48}$$

Переходя к оригиналам в изображении (39) с учетом (48), находим:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \exp(-\omega_1\tau) \left\{ \int_0^\tau \psi_1(\tau') \psi_2(\tau - \tau') d\tau' - \int_0^\tau \psi_3(\tau') \psi_2(\tau - \tau') d\tau' \right\} + \psi_4(\tau), \quad (49)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\tau) &= \frac{\gamma_3/\gamma_1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\alpha)^2}{4\tau}\right] \cos\sqrt{\gamma_3}x dx; & \psi_2(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) I_0(2\sqrt{\alpha\omega_1}x) dx; \\ \psi_3(\tau) &= \begin{cases} \frac{\alpha/2\gamma_1}{\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\tau}\right), & \alpha > 0, \\ (1/\gamma_1)\delta(\tau), & \alpha = 0; \end{cases} & \psi_4(\tau) &= \frac{1/\gamma_1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x+\xi-1)^2}{4\tau}\right] \cos\sqrt{\gamma_2}x dx; \end{aligned} \right\} (50)$$

$$\alpha = \frac{(\xi-1)\sqrt{\omega_1}}{\nu_0}; \quad \gamma_1 = \frac{\nu_0^2 - \omega_1}{\omega_1}; \quad \gamma_2 = \frac{\nu_0^2\omega_1}{\nu_0^2 - \omega_1}; \quad \gamma_3 = \frac{\omega_1^2}{\nu_0^2 - \omega_1}.$$

На рис. 2 представлено изменение напряжения в сечении $\xi = 2$ со временем для вязкоупругой среды Кельвина (49) и упругой (38). В первом случае заметно влияние вязкости среды η в параметре $\omega_1 \sim G/\eta$ согласно (10) и (48). По мере уменьшения вязкости, то есть увеличения ω_1 , поведение кривых (38) и (49) качественно становится близким. Отличие в том, что для упругой среды вначале возникает составляющая напряжения сжатия за счет первого слагаемого в (38), затем в момент времени $\tau = (\xi - 1)/\nu_0$ к сечению $\xi = \text{const} > 1$ приходит волна напряжения за счет второго слагаемого в (38), напряжение скачкообразно возрастает, переходит в область положительных и затем быстро убывает до нуля, достигая квазистатических значений. Для вязкоупругой области (при температурном нагреве) напряжение плавно без скачка изменяется непрерывно, оставаясь вначале сжимающим и далее, по мере увеличения параметра ω_1 , переходит в область растягивающих, и далее также уменьшается до квазистатических значений. Различие в поведении обеих сред Максвелла и Кельвина отчетливо обнаруживается на поверхности области $\xi = 1$ для компонент $\sigma_{xx}(\xi, \tau) = \sigma_{yy}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ в условиях резкого охлаждения от температуры T_0 до температуры T_c ($T_0 > T_c$). При этом $W(\xi, \tau) = [T(z, t) - T_0]/(T_c - T_0)$ и $W(\xi, 0) = 0$, $\xi \geq 1$, $W(1, \tau) = -1$, $\tau > 0$. На рис. 3 приведены графики изменения $\sigma_{\xi\xi}(1, \tau)$ для трех сред: упругой и вязкоупругих Максвелла и Кельвина. Для среды Гука и для среды Максвелла напряжения при мгновенном охлаждении скачкообразно изменяются на величину $(1 - 2\nu)/(1 - \nu)$. В идеально упругом материале эти напряжения остаются неизменными, в среде Максвелла начинается вязкое течение, вследствие которого напряжение непрерывно убывает, асимптотически приближаясь к нулевому значению. В среде Кельвина, напротив, скачок напряжения при мгновенном охлаждении превышает соответствующее упругое значение, к которому это напряжение

в последующем приближается. Таким образом, в среде Максвелла тело реагирует на быстрое охлаждение как вполне упругое и затем разгружается с течением времени, тогда как в среде Кельвина имеет место явление запаздывания по сравнению с упругим телом, вызванное внутренним сопротивлением. В то же время кривые на рис. 2 и 3 наглядно показывают качественное отличие результатов модельных представлений теплового удара вязкоупругих тел в рамках динамической и квазистатической моделей.

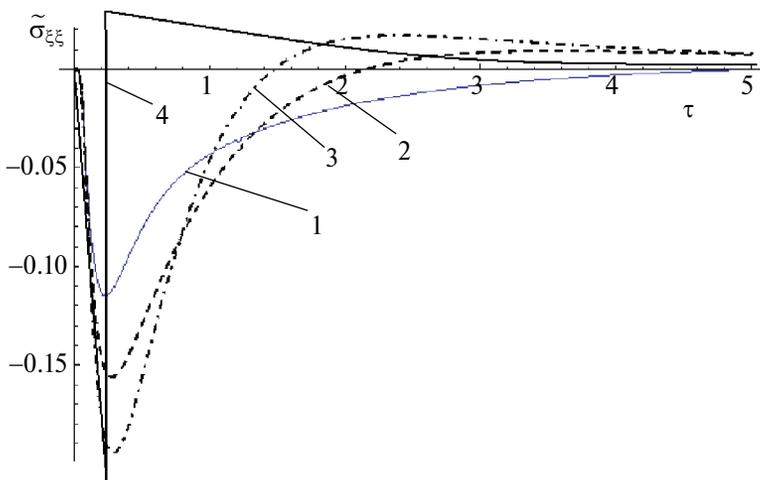


Рис. 2. Изменение напряжений в сечении $\xi = 2$; ($\nu_0^2 = 3$; $\nu = 0.25$) Вязкоупругое тело: 1 – $\omega_1 = 0.5$; 2 – $\omega_1 = 1.5$; 3 – $\omega_1 = 2.5$; 4 – упругое тело: нагрев.

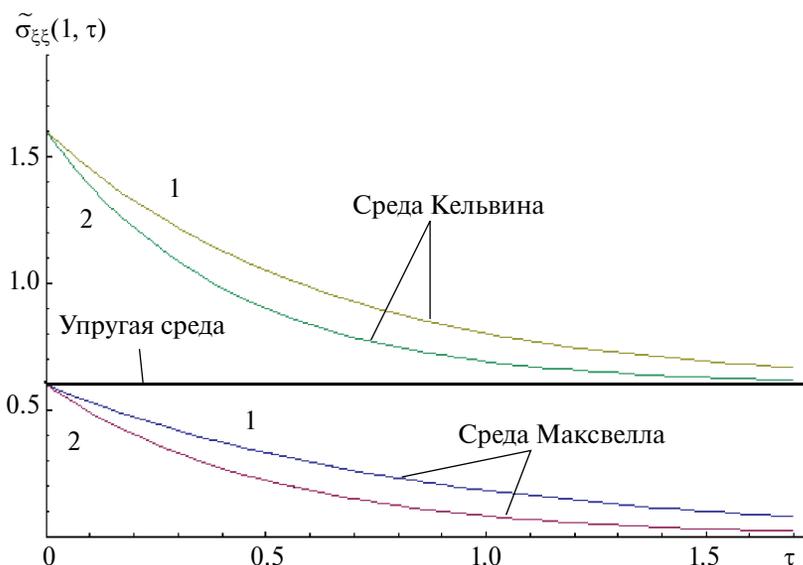


Рис. 3. Изменение напряжения на поверхности области ($\nu_0^2 = 3$; $\nu = 0.25$) 1 – $\omega_1 = 1$; 2 – $\omega_1 = 2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развиты модельные представления для динамической и квазистатической термовязкоупругости для различных случаев теплового нагружения вязкоупругих сред (температурный нагрев, тепловой нагрев, нагрев средой; тепловые нагрузки импульсные, пульсирующие, периодические, непериодические, постоянные, переменные и т.д.) в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Приведенные соотношения позволяют аналитически изучить многочисленные практические случаи термической реакции вязкоупругой области (тел канонической формы) в рамках линейных реологических моделей в терминах классической феноменологии Фурье о распространении теплоты в твердых телах. Дальнейшее развитие указанной проблемы состоит, вероятно, в переходе к локально-неравновесным процессам теплообмена [9] с использованием развитого для этих целей аналитического аппарата [4; 9; 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э.М., Партон В.З.* Динамическая термоупругость и проблемы термического удара (Обзор) // Итоги науки и техники, серия Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ. 1991, Т. 22, С. 55–127.
2. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012, 970 с.
3. *Новацкий В.* Обзор работ по динамическим проблемам термоупругости // Механика (сб. переводов), 1966, № 6, С. 101–142.
4. *Карташов Э.М., Поляков С.В.* Обобщенные модельные представления теории теплового удара для локально-неравновесных процессов теплообмена. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022, препринт № 100, 28 с.
5. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964, 517 с.
6. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физ-мат. литер., 1963, 252 с.
7. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001, 540 с.
8. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические методы термомеханики. М.: Физматлит, 2002, 168 с.
9. *Хрычев Д.А.* Свойства определителя Вронского системы решений линейного однородного уравнения: случай, когда число решений меньше порядка уравнений // Российский технологический журнал, 2023, 11(6), С. 68–75.
10. *Карташов Э.М.* Развитие обобщенных модельных представлений теплового удара для локально-неравновесных процессов переноса теплоты // Российский технологический журнал, 2023, № 11(3), С. 70–85.

Model Representations of the Theory of Thermal Shock of Viscoelastic Bodies

E. M. Kartashov^{a, b, *}, S. S. Krylov^b

^a*MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia*

^b*Federal State Budgetary Educational Institution Moscow Aviation Institute
(National Research University) Moscow, Russia*

**e-mail: professor.kartashov@gmail.com*

Model representations of the theory of thermal shock of viscoelastic bodies based on two different approaches are considered. In the first approach, based on the introduction of stress and strain deviators using linear rheological models of Maxwell and Kelvin, new integral and differential relations are proposed, including simultaneously dynamic and quasi-static models for viscoelastic and elastic media, generalizing the results of previous studies. The proposed constitutive relations of the new form are applicable to describe the thermal response of bodies of canonical shape, limited by the boundaries of a rectilinear shape in Cartesian coordinates and are extended to the case of curvilinear boundaries in cylindrical and spherical coordinates. The second approach describes an elastic-viscoelastic analogy, which consists in the fact that the original problem of temperature stresses of a viscoelastic body can be reduced to the equivalent problem of thermoelasticity by replacing the shear modulus and Poisson's ratio in the operational (according to Laplace) solution of the thermoelastic problem with their images as in the model Maxwell and in the Kelvin model. It is shown that after performing the inverse transformation, an analytical solution to the problem for a thermoviscoelastic medium is found. An illustrative example is given and the differences in the thermal response to sudden heating of an elastic and viscoelastic medium are analyzed.

Keywords: heat stroke, thermoelasticity, viscoelastic bodies, rheological models