

УДК 621.317

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ В СТЕПЕННОЙ РЯД

© 2024 г. Н. В. Коровкин<sup>1</sup>, С. С. Грицутенко<sup>2</sup>, Д. А. Федотов<sup>3,\*</sup><sup>1</sup>ФГАОУ ВО Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия<sup>2</sup>«НПО ТЕХНО-АС», Коломна, Россия<sup>3</sup>ФГБОУ ВО Омский государственный университет путей сообщения, Омск, Россия  
\*e-mail: fedotoff-dm@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.10.2023 г.

После доработки 17.06.2024 г.

Принята к публикации 20.06.2024 г.

Рассмотрена задача контроля параметров нелинейных элементов, входящих в разнообразные электротехнические устройства. Предложен и исследован новый алгоритм воспроизведения по результатам измерения нелинейной ВАХ устройства, обладающий рядом преимуществ в сравнении с известными, позволяющий, в частности, получать аналитическое представление ВАХ в реальном масштабе времени. В основе предлагаемого алгоритма лежит непосредственное определение коэффициентов полиномиальной аппроксимации ВАХ. Также выполнен обзор научных исследований, сделанных к настоящему времени другими авторами, занимающимися данной проблемой. В статье также получены простые соотношения для определения амплитуд гармоник тока через коэффициенты степенного ряда и амплитуды напряжения на нелинейном элементе. Для облегчения промежуточных расчетов использованы биномиальные коэффициенты. Получены соотношения для нулевой, нечетной и четной гармоник тока, а также аналитические выражения для коэффициентов полиномиальной аппроксимации. Выполнено экспериментальное исследование предложенного метода, по результатам которого произведена оценка его точности. Использование предлагаемого метода существенно упрощает обработку и сокращает время измерений нелинейных ВАХ.

*Ключевые слова:* вольтамперная характеристика, нелинейный элемент, аппроксимация, гармоника тока, коэффициент разложения

DOI: 10.31857/S0002331024020081

### ВВЕДЕНИЕ

Измерение вольтамперных характеристик нелинейных элементов в реальном масштабе времени востребована в самых различных прикладных областях [1–4]. Современные средства измерений позволяют выполнять измерения напряжений и токов с погрешностью, не превышающей  $2 \cdot 10^{-12}$  и мегагерцовыми частотами измерений. При этом в большом числе приложений интерес представляют не сами измеряемые напряжения (токи) устройств, а их вольтамперные характеристики (ВАХ). Также

важным требованием является необходимость воспроизведения ВАХ устройств и изменений ВАХ в реальном масштабе времени. Именно такие алгоритмы позволяют создавать системы оперативного реагирования на регламентные или аварийные изменения режимов работы разнообразных технических устройств и систем.

Большинство электротехнических устройств обладают нелинейными ВАХ. Используемые в промышленности реальные устройства имеют сложные ВАХ, что затрудняет их описание с достаточной точностью при помощи простых аналитических выражений. Для ряда приложений важным также является определение ВАХ элемента “здесь и сейчас”, так как определенная заранее ВАХ может неверно отражать реальные свойства нелинейного элемента (НЭ), например, из-за деградации его характеристик ввиду старения.

Рассмотрим НЭ с управляемой напряжением ВАХ. Зависимость тока  $i$  от напряжения  $u$  таких устройств может быть представлена в виде [5]

$$i = g(u), \quad (1)$$

где  $g(u)$  однозначно определенная непрерывная функция. Если НЭ с ВАХ (1) рассматривать как, например, нагрузку в электрической цепи переменного тока, то нелинейность ВАХ приведет к возникновению высших гармоник в токах в общем случае всех ветвей цепи. Это может негативно влиять на работу устройств, составляющих цепь, вызывая их дополнительный нагрев, внося помехи и изменяя штатный режим функционирования вплоть до перехода цепи в нерабочее состояние. Поэтому весьма важным для практики является возможность выполнять измерение ВАХ в реальном времени.

Для анализа процессов в нелинейных цепях удобно задать ВАХ НЭ в аналитическом виде, используя ту или иную аппроксимирующую функцию, которая, являясь желательной достаточно простой, могла бы тем не менее воспроизводить особенности реальной характеристики с достаточной точностью. В электротехнике с этой целью наиболее часто используют кусочно-линейную и полиномиальную аппроксимации, а также их симбиоз – сплайн-аппроксимацию. Сопоставлению достоинств и недостатков этих аппроксимаций посвящено значительное число работ [6] и не обсуждается здесь. В рамках настоящей статьи мы рассмотрим только полиномиальную аппроксимацию. Авторами настоящей статьи ранее был предложен метод измерения характеристик нелинейных элементов электрической цепи [7–9]. Материал настоящей статьи является продолжением этих разработок и совершенствованием предложенного метода.

## ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Полиномиальная аппроксимация  $g(u)$  имеет вид, точность которой определяется количеством членов разложения.

$$g(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_Ku^K, \quad (2)$$

где  $a_m$   $m = \overline{0, K}$  – коэффициенты полинома, а  $K$  – его порядок, определяющий во многом точность аппроксимации. Для аппроксимации функции  $g(u)$  полиномом  $K$ -й степени, необходимо определить коэффициенты  $a_m$   $m = \overline{0, K}$  [10–12]. Поэтому

цель работы – выработать эффективный метод определения коэффициентов по измерениям напряжения и тока нелинейного элемента в реальном времени.

### ПРЕДЛАГАЕМЫЙ МЕТОД

Рассмотрим далее метод определения коэффициентов  $a_m$   $m = \overline{0, K}$ . Пусть на входе НЭ действует синусоидальное напряжение:

$$u(t) = U_1 \cos(2\pi ft + \varphi) = U_1 \left( \frac{1}{2} e^{j(2\pi ft + \varphi)} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi ft + \varphi)} \right), \quad (3)$$

где  $U_1, f, \varphi$  – соответственно амплитуда, частота и фаза напряжения. Тогда зависимость тока от времени будет иметь вид

$$i(t) = g(u(t)) = \sum_{k=0}^K I_k \cos(k2\pi ft + \varphi). \quad (4)$$

При нахождении  $I_k$  раскладываем ток через комплексные экспоненты и берем от них удвоенную действительную часть

$$I_k \cos(\alpha) = \frac{I_k}{2} e^{j\alpha} + \frac{I_k}{2} e^{-j\alpha} = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{I_k}{2} e^{j\alpha} \right). \quad (5)$$

При вычислении  $g(u(t))$  по (2) поступаем аналогично (5). Тогда для степеней косинусов с использованием биномиальных коэффициентов  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  [13, 14] имеем для, например,  $K = 7$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} e^{j\alpha} + \frac{1}{2} e^{-j\alpha} \right)^7 &= \sum_{k=0}^7 C_7^k \left( \frac{1}{2} e^{j\alpha} \right)^{7-k} \left( \frac{1}{2} e^{-j\alpha} \right)^k = \\ &= \frac{\cos(7\alpha) + 7 \cos(5\alpha) + 21 \cos(3\alpha) + 35 \cos(\alpha)}{64}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, для полинома, например, 7-го порядка выражение (4) примет вид

$$\begin{aligned} i(t) = g(u(t)) &= a_0 + a_1 U_1 \cos(\alpha) + \frac{a_2 U_1^2}{2} + \frac{a_2 U_1^2 \cos(2\alpha)}{2} + \frac{3a_3 U_1^3 \cos(\alpha)}{4} + \frac{a_3 U_1^3 \cos(3\alpha)}{4} + \\ &+ \frac{3a_4 U_1^4}{8} + \frac{a_4 U_1^4 \cos(2\alpha)}{2} + \frac{a_4 U_1^4 \cos(4\alpha)}{8} + \frac{5a_5 U_1^5 \cos(\alpha)}{8} + \frac{5a_5 U_1^5 \cos(3\alpha)}{16} + \frac{a_5 U_1^5 \cos(5\alpha)}{16} + \\ &+ \frac{5a_6 U_1^6}{16} + \frac{15a_6 U_1^6 \cos(2\alpha)}{32} + \frac{3a_6 U_1^6 \cos(4\alpha)}{16} + \frac{a_6 U_1^6 \cos(6\alpha)}{32} + \\ &+ \frac{35a_7 U_1^7 \cos(\alpha)}{64} + \frac{21a_7 U_1^7 \cos(3\alpha)}{64} + \frac{7a_7 U_1^7 \cos(5\alpha)}{64} + \frac{a_7 U_1^7 \cos(7\alpha)}{64}. \end{aligned}$$



При расчете данного выражения используются только четные коэффициенты. Ненулевые гармоники рассчитываются по формуле

$$I_n = \sum_{i=0}^K a_i U_1^i \frac{i!}{\left(\frac{i+n}{4}\right)! \left(\frac{i-n}{4}\right)!}, \quad (9)$$

где  $n$  – номер гармоники.

Стоит отметить, что для вычисления нечетных гармоник используются только нечетные коэффициенты и наоборот.

Таким образом, получены выражения для гармоник тока  $I_k$  через коэффициенты  $a_m$   $m = \overline{0, K}$  нелинейной характеристики  $g(u)$ . Решив полученную систему уравнений (7), определим искомые коэффициенты  $a_m$   $m = \overline{0, K}$ .

Решение системы уравнений (7) также может быть найдено аналитически для произвольного  $K$  [16–18]. Формулы для коэффициентов  $a_m$   $m = \overline{0, K}$  через значения гармоник тока  $I_k$  будут иметь следующий вид

$$a_0 = I_0 + \sum_{i=1}^{K-1} I_{2i} (-1)^i,$$

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{U_1^n} \left( I_n + \sum_{i=1}^{K-1} \frac{I_{n+2i} (-1)^i (n+2i)(i+n-1)!}{i! n!} \right),$$

где  $n$  – номер коэффициента. Для, например,  $K = 10$  искомые коэффициенты будут иметь вид

$$a_0 = I_0 - I_2 + I_4 - I_6 + \dots - I_{14} + I_{16} - I_{18},$$

$$a_1 = \frac{I_1 - 3I_3 + 5I_5 - 7I_7 + \dots - 15I_{15} + 17I_{17}}{U_1},$$

$$a_2 = \frac{2(I_2 - 4I_4 + 9I_6 - 16I_8 + \dots - 64I_{16} + 81I_{18})}{U_1^2},$$

$$\vdots$$

$$a_9 = \frac{256(I_9 - 11I_{11} + 65I_{13} - 275I_{15} + 935I_{17})}{U_1^9},$$

$$a_{10} = \frac{512(I_{10} - 12I_{12} + 77I_{14} - 352I_{16} + 1287I_{18})}{U_1^{10}}.$$

Предложенный алгоритм позволяет определить значение коэффициентов разложения нелинейной характеристики в степенной ряд любого порядка через амплитудные значения гармоник тока  $I_k$  и поданного напряжения  $U_1$ .

**Таблица 1.** Результаты расчета коэффициентов для восьми гармоник тока, разложенных через степенной ряд в одиннадцатой степени нелинейной вольт-амперной характеристики

	$U_1^0 a_0$	$U_1^1 a_1$	$U_1^2 a_2$	$U_1^3 a_3$	$U_1^4 a_4$	$U_1^5 a_5$	$U_1^6 a_6$	$U_1^7 a_7$	$U_1^8 a_8$	$U_1^9 a_9$	$U_1^{10} a_{10}$	$U_1^{11} a_{11}$
$I_0$	1		1/2		3/8		5/16		35/128		63/256	
$I_1$		1		3/4		5/8		35/64		63/128		231/512
$I_2$			1/2		1/2		15/32		7/16		105/256	
$I_3$				1/4		5/16		21/64		21/64		165/512
$I_4$					1/8		3/16		7/32		15/64	
$I_5$						1/16		7/64		9/64		165/1024
$I_6$							1/32		1/16		45/512	
$I_7$								1/64		9/256		55/1024
$I_8$									1/128		5/256	

**Таблица 2.** Амплитудные значения гармоник тока нелинейной характеристики, заданной полиномом пятой степени

Номер гармоники тока	0	1	2	3	4	5
Амплитудное значение гармоники тока, А	0.0350	0.0638	0.0300	0.0231	0.0050	0.0031

**Таблица 3.** Амплитудные значения гармоник тока нелинейной характеристики, заданной полиномом пятой степени при подаче случайной ошибки

Номер гармоники тока	0	1	2	3	4	5
Амплитудное значение гармоники тока при величине ошибки $10^{-3}$ , А	0.0350	0.0637	0.0300	0.0231	0.0050	0.0032
Амплитудное значение гармоники тока при величине ошибки $10^{-2}$ , А	0.0351	0.0638	0.0302	0.0231	0.0052	0.0033

## ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА

В качестве экспериментального подтверждения правильности данного алгоритма рассмотрим нелинейную зависимость, заданную полиномом пятой степени

$$i = 0.01 + 0.01u + 0.02u^2 + 0.03u^3 + 0.04u^4 + 0.05u^5.$$

В результате моделирования в пакете MATLAB были получены амплитудные значения гармоник тока (табл. 2).

Используя данные значения гармоник тока, находим значения коэффициентов разложения в степенной ряд:

$$a_0 = 0.035 - 0.03 + 0.005 = 0.01, \quad a_1 = \frac{2^0}{1^1}(0.0638 - 3 \cdot 0.0231 + 5 \cdot 0.0031) = 0.01,$$

$$a_2 = \frac{2^1}{1^2}(0.03 - 4 \cdot 0.005) = 0.02, \quad a_3 = \frac{2^2}{1^3}(0.0231 - 5 \cdot 0.0031) = 0.03,$$

$$a_4 = \frac{2^3}{1^4}(0.005) = 0.04, \quad a_5 = \frac{2^4}{1^5}(0.0031) = 0.05.$$

Далее определим амплитудные значения гармоник тока и коэффициенты разложения в степенной ряд при подаче случайной ошибки. Результаты сведем в табл. 3 и 4.

Абсолютные отклонения полученных коэффициентов при заданных величинах случайной ошибки приведены в табл. 5.

Как видно из полученных результатов, значения найденных коэффициентов равны коэффициентам заданного полинома, что может свидетельствовать о правильности полученного алгоритма.

## ДИСКУССИЯ

Как известно, спектральный анализ включает изучение характеристик источника воздействия и функционирующей аппаратуры [18, 19]. Но со временем и под воздействием дестабилизирующих факторов характеристики подаваемого сигнала могут изменяться. В результате таких воздействий сигнал на выходе аппаратуры может быть изменен. В спектре появятся более высокие гармоники, которые приводят к

**Таблица 4.** Значения коэффициентов разложения в степенной ряд при подаче случайной ошибки

Номер коэффициента	0	1	2	3	4	5
Значение коэффициента при величине ошибки 0	0.0100	0.0100	0.0200	0.0300	0.0400	0.0500
Значение коэффициента при величине ошибки $10^{-3}$	0.0100	0.0104	0.0200	0.0284	0.0400	0.0512
Значение коэффициента при величине ошибки $10^{-2}$	0.0101	0.0110	0.0188	0.0264	0.0416	0.0528

**Таблица 5.** Абсолютные отклонения полученных коэффициентов при подаче случайной ошибки

Номер коэффициента	0	1	2	3	4	5
$\Delta$ при величине ошибки $10^{-3}$	0.0000	0.0004	0.0000	0.0016	0.0000	0.0012
$\Delta$ при величине ошибки $10^{-2}$	0.0001	0.0010	0.0012	0.0036	0.0016	0.0028

искажениям, что отражается на безопасности и уязвимости таких систем. Основной задачей в данном случае становится определение гармонических составляющих воздействия на аппаратуру различного назначения. Поэтому анализ воздействия сигналов различного рода на нелинейные устройства будет являться предметом дальнейших научных исследований.

Спектральный анализ дает максимально качественную оценку воздействия дестабилизирующих факторов на объекты энергетических и телекоммуникационных устройств в любой момент эксплуатации. Последствия таких воздействий, как правило, приводят к сбоям в работе управляющих систем. Эти влияния оказывают воздействия на работу как аналогового, так и цифрового оборудования, что в настоящее время актуально при разработке и эксплуатации систем гражданского и специального назначения.

В результате проделанной работы можно утверждать, что полученные математические выражения  $a_m$   $m = \overline{0, K}$  справедливы при исследовании любых ВАХ и значительно упрощают обработку и сокращают время проведения таких измерений НЭ. Предметом дальнейшей работы может стать исследование полученного алгоритма на практическую применимость при измерении реальных нелинейных устройств в реальных условиях, т.е. при разных уровнях шумов.

## ВЫВОДЫ

В данной статье предложен вариант измерения нелинейной ВАХ, основанный на определении коэффициентов разложения степенного ряда, полученного при полиномиальной аппроксимации. Также выполнено исследование предлагаемого метода, по результатам которого можно утверждать, что он имеет достаточно высокую точность. В завершении составлен план дальнейших исследований в рассматриваемом направлении.

Метод полезен при проектировании и эксплуатации систем гражданского и специального назначения, так как его использование позволяет повысить информационную защищенность систем различного назначения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бизяев М.Н., Шестаков А.Л. Восстановление динамически искаженных сигналов испытательно-измерительных систем методом скользящих режимов // Известия РАН. Серия "Энергетика". 2004. № 6. С. 114–125.
2. Кнорринг В.Г., Солопченко Г.Н. Теория измерений как самостоятельная область знаний: характеристические цели и задачи // Измерительная техника. 2003. № 3. С. 13–17.

3. *Hajiyev Ch.* Innovation approach based measurement error self-correction in dynamic systems // Measurement. 2006. № 39. P. 585–593.
4. *Vieira W.G., Santos V.M.L., Carvalho F.R., Pereira J.A.F.R., Fileti A.M.F.* Identification and predictive control of a FCC unit using a MIMO neural model I // Chemical Engineering and Processing. 2005. № 44. P. 855–868.
5. *Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.* Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. 4-е изд. Т. 1 / СПб.: Питер, 2003. 463 с.
6. *Козлов В.Н., Куприянов В.Е., Шашихин В.Н.* Управление энергетическими системами. Теория автоматического управления / под ред. Козлова В.Н. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 255 с.
7. *Грицутенко С.С., Коровкин Н.В.* Метод измерения характеристик нелинейных элементов электрических цепей // Электричество. 2019. № 1. С. 37–44.
8. *Черемисин В.Т., Грицутенко С.С.* Способ повышения точности измерения гармонических составляющих тягового тока и напряжения. Вестник Ростовского гос. университета путей сообщения. 2007. № 2. С. 94–99.
9. *Грицутенко С.С.* К вопросу об измерении параметров дискретизированного сигнала // Вопросы радиоэлектроники. 2010. Т. 1. № 3. С. 103–107.
10. *Куралбаев З.К., Ержан А.А.* Использование аппроксимирующих функций для описания вольтамперных характеристик нелинейных элементов цепи // Вестник НАН РК. 2013. № 2. С. 23.
11. *Дикусар Н.Д.* Полиномиальная аппроксимация высоких порядков // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 9. С. 89–109.
12. *Богуславский И.* Полиномиальная аппроксимация для нелинейных задач оценивания и управления. // Litres, 2022.
13. *Ерусалимский Я.М.* Биномиальные коэффициенты в тождествах для натуральных чисел, факториалов и многочленов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2008. № 5. С. 26–28.
14. *Балыко И.А., Левашов С.В., Холодов Д.В.* Выражения для сумм рядов с биномиальными коэффициентами // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения. 2012. Т. 12. №. 7. С. 139–142.
15. *Коровкин Н.В., Грицутенко С.С.* О применимости быстрого преобразования Фурье для гармонического анализа несинусоидальных токов и напряжений. Изв. РАН. Энергетика. 2017. № 2. С. 73–86.
16. *Тихомиров С.Г.* Анализ сложных нелинейных электрических цепей в частотной области методом баланса производных // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 68–90.
17. *Белага Э.Г.* О вычислении значений многочлена от одного переменного с предварительной обработкой коэффициентов // Проблемы кибернетики. 1961. Т. 5. С. 7–15.
18. *Михайлов Р.Л., Макаренко С.И.* Оценка устойчивости сети связи в условиях воздействия на нее дестабилизирующих факторов // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2013. № 4 (12). С. 69–79.
19. *Митрохин В.Е., Федотов Д.А.* Влияния коммутационных перенапряжений на устойчивость функционирования и информационную безопасность систем телекоммуникаций // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2009. № 1–2 (19). С. 5–7.

## **Determination of Coefficients of De composition of a Nonlinear Characteristic into a Power Series**

**N. V. Korovkin<sup>1</sup>, S. S. Gritsutenko<sup>2</sup>, D. A. Fedotov<sup>3, \*</sup>**

<sup>1</sup>*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*

<sup>2</sup>*"NPO TEKHNO-AS", Kolomna, Russia*

<sup>3</sup>*Omsk State Transport University, Omsk, Russia*

*\*e-mail: fedotoff-dm@yandex.ru*

The problem of monitoring the parameters of nonlinear elements included in various electrical devices is considered. A new algorithm for reproducing the nonlinear current-voltage characteristic of a device based on the measurement results has been proposed and investigated, which has several advantages over the known ones, allowing, in particular, to obtain an analytical representation of the current-voltage characteristic in real time. The proposed algorithm is based on the direct determination of the coefficients of the polynomial approximation of the current-voltage characteristic. A review of scientific research done to date by other authors dealing with this problem has also been carried out. Formulas for determining the amplitudes of current harmonics through power series coefficients and voltage amplitudes on a nonlinear element are obtained. Binomial coefficients are used to facilitate intermediate calculations. The relations for the zero, odd and even harmonics of the current are obtained, as well as analytical expressions for the coefficients of the polynomial approximation. An experimental study of the proposed method was carried out, according to the results of which an assessment of its accuracy was made. The use of the proposed method significantly simplifies the processing and reduces the measurement time of nonlinear VAC.

*Keywords:* volt ampere characteristic, nonlinear element, approximation, current harmonic, decomposition coefficient