

УДК 536.2 (075) 46

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОБЗОР)

© 2024 г. В. А. Кудинов*, К. В. Трубицын, Е. В. Котова,
Т. Е. Гаврилова, В. К. Ткачев

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования “Самарский государственный технический университет”, Самара, Россия*
**e-mail: totig@yandex.ru*

Поступила в редакцию 08.10.2023 г.

После доработки 17.06.2024 г.

Принята к публикации 22.06.2024 г.

Представлен обзор исследований, связанных с использованием дополнительных граничных условий (ДГУ) и дополнительных искомых функций (ДИФ) при получении аналитических решений задач теплопроводности. ДГУ позволяют выполнить уравнение на границах, что приводит к его выполнению и внутри области, исключая непосредственное интегрирование по пространственной координате. ДИФ позволяет сводить уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, из решения которого находятся собственные числа краевой задачи. Собственные числа в классических методах находятся из решения краевой задачи Штурма—Лиувилля, сформулированной в области пространственной переменной. Следовательно, используемый в настоящей работе метод приводит к другому алгоритму их определения, основанному на решении временного дифференциального уравнения, порядок которого определяется числом приближений получаемого решения. В задаче, основанной на определении фронта температурного возмущения, найдена эквивалентность решений параболического и гиперболического уравнений теплопроводности. И, в частности, найдено число приближений, ограничивающих скорость продвижения тепловой волны в решении параболического уравнения до величины, равной ее реальному значению для конкретного материала, при которой она совпадает с решением гиперболического уравнения.

Ключевые слова: краевые задачи, аналитические решения, ДИФ, ДГУ, конечная скорость распространения теплоты, фронт температурного возмущения, параболические и гиперболические уравнения теплопроводности

DOI: 10.31857/S0002331024020053

ВВЕДЕНИЕ

Для ряда сложных краевых задач (нелинейных, с переменными свойствами и др.) точные решения не найдены. Для многих других задач полученные точные

аналитические решения представляются в виде сложных рядов, плохо сходящихся в окрестности малых значений времени [1–6]. Применение классических аналитических методов для цилиндрических и сферических тел приводит к бесконечным рядам, включающим функции Бесселя. Используемые в решениях собственные числа затруднительно представить в виде общей формулы, так как они определяются из степенных алгебраических (характеристических) уравнений, для которых могут быть получены лишь численные решения. Классические методы применительно к краевым задачам с осевой и центральной симметрией неэффективны еще и в тех случаях, когда необходимо находить решение при малых значениях времени, ввиду того, что требуется использование большого числа приближений. Поэтому возникает потребность в использовании более эффективных методов. Среди них распространение получили методы Л.В. Канторовича, Бубнова–Галеркина, интегральный метод теплового баланса и др. [4–14]. Они более универсальны, чем точные, однако приводят к низкой точности решений. Основная причина заключается в необходимости выполнения осредненных по пространственной переменной исходных дифференциальных уравнений, что приводит к низкой точности определения собственных чисел. В интегральном методе теплового баланса процесс теплопроводности представляется в виде двух стадий по времени. Применение ДИФ для каждой стадии позволяет свести исходное уравнение в частных производных к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для повышения точности используются ДГУ [11–16].

1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ПЛАСТИНЕ (ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ПЕРВОГО РОДА)

Во всех представленных в настоящей работе решениях краевых задач используется метод, основанный на определении ДИФ и ДГУ, позволяющий получать точные аналитические решения. Использование ДГУ позволяет выполнить исходное дифференциальное уравнение на границах, что приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, исключая процесс непосредственного интегрирования по пространственной переменной. Использование ДИФ позволяет сводить уравнение в частных производных к временному обыкновенному дифференциальному уравнению, из решения которого находятся собственные числа краевой задачи.

Основные положения метода рассмотрим применительно к решению задачи теплопроводности для пластины в математической постановке вида (рис. 1)

$$\partial\Theta(\xi, Fo)/\partial Fo = \partial^2\Theta(\xi, Fo)/\partial\xi^2, (Fo > 0; 0 < \xi < 1), \quad (1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad (2)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1, \quad (3)$$

$$\partial\Theta(1, Fo)/\partial\xi = 0, \quad (4)$$

где $\Theta = (T - T_0)/(T_{CT} - T_0)$ – безразмерная температура; $Fo = \alpha\tau/\delta^2$ – число Фурье; $\xi = x/\delta$ – безразмерная координата; x – координата; δ – толщина

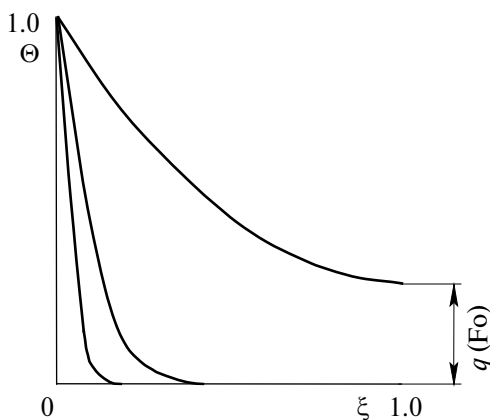


Рис. 1. Схема теплообмена.

пластины; a – коэффициент температуропроводности; τ – время; T_0 – начальная температура; T_{CT} – температура стенки.

Введем ДИФ

$$q(Fo) = \Theta(1, Fo). \quad (5)$$

Решение будем разыскивать в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^n b_k(q) \varphi_k(\xi), \quad (6)$$

где $b_k(q)$, $(k = \overline{1, n})$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\xi) = \sin(r\pi\xi/2)$, $(r = 2k - 1)$ – координатные функции.

Соотношение (6) удовлетворяет условиям (3), (4). Коэффициенты $b_k(q)$, $(k = \overline{1, n})$ будем находить из (5) и ДГУ, общие формулы для которых записываются в виде [11, 12, 16]

$$\partial^i \Theta(0, Fo) / \partial \xi^i = 0, (i = 2, 4, 6, \dots), \quad (7)$$

$$\partial^{2i} \Theta(1, Fo) / \partial \xi^{2i} = \partial^i q(Fo) / \partial Fo^i, (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (8)$$

$$\partial^i \Theta(1, Fo) / \partial \xi^i = 0, (i = 3, 5, 7, \dots). \quad (9)$$

Отметим, что ДГУ (7), (9) решением (6) выполняются. Для нахождения $b_k(q)$ будем использовать соотношение (5) и ДГУ (8).

В первом приближении подставим (6), ограничившись одним слагаемым ряда, в (5). Для $b_1(q)$ получаем алгебраическое уравнение, после решения которого решение (6) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + (q(Fo) - 1) \sin(\pi\xi/2). \quad (10)$$

Потребуем выполнения уравнения (1) в точке $\xi = 1$ (или в любой другой точке, исключая $\xi = 0$)

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2}. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (11), получаем

$$8dq/dFo = -\pi^2(q-1)/4. \quad (12)$$

Отметим, что уравнение (12) получено, минуя процесс непосредственного интегрирования уравнения (1) по переменной ξ . Уравнение (12) получается и для любой другой точки координаты ξ , не равной нулю. В точке $\xi = 0$ задано граничное условие первого рода (уравнение (1) в этой точке удовлетворяется в предельном смысле — правая и левая его части равны нулю).

Интегрируя уравнение (14), получаем

$$q(Fo) = C_1 \exp(-v_1 Fo),$$

где C_1 — постоянная интегрирования; $v_1 = \pi^2/4$ — первое собственное число, совпадающее с точным его значением [2].

Отметим, что собственное число получено не из задачи Штурма—Лиувилля, включающей уравнение второго порядка по пространственной переменной, а из решения ОДУ относительно ДИФ, изменяющейся во времени. Таким образом, в данном случае можно отметить другое направление определения собственных чисел [11, 12, 15, 16].

Подставляя найденное $q(Fo)$ в (10), имеем

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + C_1 \exp(-v_1 Fo) \sin\left(\frac{\pi}{2} \xi\right). \quad (13)$$

Для определения C_1 , используя (2), получаем

$$C_1 \int_0^1 \sin^2(\pi \xi/2) d\xi = -\int_0^1 \sin(\pi \xi/2) d\xi. \quad (14)$$

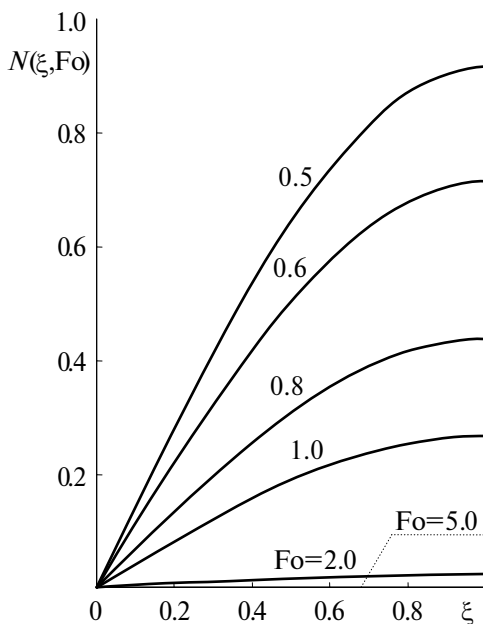
Из (14) находим $C_1 = -4/\pi$, совпадающее с точным его значением.

Соотношение (13) является решением задачи (1)–(4) в первом приближении. Оно удовлетворяет условиям (3)–(4) и уравнению (1) в области $0 \leq \xi \leq 1$. Выполним исследование выполнения уравнения (1) в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Подставляя (13) в (1), для его правой и левой части получаем одинаковую величину

$$N(\xi, Fo) = \pi \exp(-\pi^2 Fo/4) \sin(\pi \xi/2), \quad (15)$$

принимаящую в точке $\xi = 0$ нулевое значение, то есть уравнение (1) в этой точке удовлетворяется в предельном смысле [15]. Уравнение (1) удовлетворяется при любых значениях $0 \leq \xi \leq 1$, в том числе и в граничных точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Как следует из рис. 2, с увеличением Fo $N(\xi, Fo) \rightarrow 0$.

Анализ расчетов по (13) приводит к заключению, что при $0.1 \leq Fo < \infty$ расхождение с точным решением не превышает 5%.

Рис. 2. Изменение $N(\xi, Fo)$.

Решение (13) точно удовлетворяет всем условиям задачи (1)–(4), за исключением начального условия (2). Для повышения точности найдем решение во втором приближении. Подставляя (6) в (5), (8) (при $i=1$), для $b_1(q)$ и $b_2(q)$ получаем систему двух алгебраических уравнений. Соотношение (6) после их определения будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \frac{\left[-\left(4q' + 9\pi^2(q-1)\right)\sin(\pi\xi/2) + \left(4q' + \pi^2(q-1)\right)\sin(3\pi\xi/2) \right]}{(8\pi^2)}. \quad (16)$$

Подставим (16) в (11)

$$\frac{4}{3\pi^3}q'' + \frac{10}{3\pi}q' + \frac{3\pi}{4}q - \frac{3\pi}{4} = 0, \quad (17)$$

где $q'' = d^2q/dFo^2$; $q' = dq/dFo$.

Уравнение (17) получается подстановкой (16) в (11) применительно к любой другой точке переменной ξ (исключая $\xi = 0$), что оказалось возможным ввиду выполнения решением (6) ДГУ (7)–(9). Следовательно, выполнение уравнения на границах приводит к его выполнению и внутри области.

Интеграл уравнения (17) будет

$$q(Fo) = C_1 \exp(-v_1 Fo) + C_2 \exp(-v_2 Fo),$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования; $v_2 = 9\pi^2/4$ – второе собственное число, совпадающее с точным его значением [2].

Подставим $q(Fo)$ в (16)

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - C_1 \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} Fo\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} \xi\right) - C_2 \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4} Fo\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} \xi\right). \quad (18)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из интеграла взвешенной невязки начального условия (2) и выполнения требования ее ортогональности к функциям $\sin(j\pi\xi/2)$, ($j = 1, 3$)

$$\int_0^1 \left(C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} \xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} \xi\right) \right) \sin\left(\frac{j\pi}{2} \xi\right) d\xi = \int_0^1 \sin\left(\frac{j\pi}{2} \xi\right) d\xi, (j = 1, 3). \quad (19)$$

Ввиду ортогональности координатных функций, система двух алгебраических уравнений (19) разделяется так, что в каждое уравнение входит лишь одно неизвестное

$$C_k \int_0^1 \sin^2(r\pi\xi/2) d\xi = \int_0^1 \sin(r\pi\xi/2) d\xi, (k = 1, 2; r = 2k - 1). \quad (20)$$

Из (20) получаем $C_k = -4/(r\pi)$, ($k = 1, 2$; $r = 2k - 1$). Найденные C_1 и C_2 совпадают с точными их значениями [2]. С их учетом решение (18) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{k=1}^2 \frac{4}{r\pi} \exp\left(-\frac{r^2\pi^2}{4} Fo\right) \sin\left(\frac{r\pi}{2} \xi\right), (r = 2k - 1). \quad (21)$$

В третьем приближении $b_k(q)$, ($k = 1, 2, 3$) находятся из (5), (8) ($i = 1, 2$). Для $q(Fo)$ будем иметь

$$\frac{4}{15\pi^5} q''' + \frac{7}{3\pi^3} q'' + \frac{259}{60\pi} q' + \frac{15}{16} \pi q - \frac{15}{16} \pi = 0, \quad (22)$$

где $q''' = d^3q / dFo^3$.

Подставив решение уравнения (22) в (6), находим

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = 1 + C_1 \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} Fo\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} \xi\right) - C_2 \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4} Fo\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} \xi\right) + \\ + C_3 \exp\left(-\frac{25\pi^2}{4} Fo\right) \sin\left(\frac{5\pi}{2} \xi\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Постоянные C_k , ($k = 1, 2, 3$) находятся из начального условия (2)

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^3 C_k \exp\left(-\frac{r^2\pi^2}{4} Fo\right) \sin\left(\frac{r\pi}{2} \xi\right) \sin\left(\frac{j\pi}{2} \xi\right) d\xi = \int_0^1 \sin\left(\frac{j\pi}{2} \xi\right) d\xi \quad (24)$$

$$(j = k = 1, 2, 3; r = 2k - 1).$$

Из-за ортогональности синусов система уравнений (24) разделяется. Решение любого из этих уравнений будет $C_k = 4(-1)^k / (r\pi)$.

Решение (23) с учетом C_k , ($k = 1, 2, 3$) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{k=1}^3 \frac{4(-1)^{k+1}}{r\pi} \exp\left(-\frac{r^2\pi^2}{4} Fo\right) \sin\left(\frac{r\pi}{2} \xi\right). \quad (25)$$

Исходя из формул (16), (21), (25) и из анализа решений последующих приближений, получаем общую формулу вида

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{k=1}^n A_k \exp(-v_k Fo) \sin\left(\frac{r\pi}{2} \xi\right), \quad (26)$$

где $A_k = 4(-1)^{k-1} / (r\pi)$; $v_k = r^2\pi^2 / 4$, $(r = 2k - 1; k = \overline{1, n})$.

Из анализа решения (26), можно заключить, что оно представляет точное аналитическое решение задачи (1)–(4) [2].

2. НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ – ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ КООРДИНАТЫ

Рассмотрим краевую задачу теплопроводности для пластины при линейном изменении начальной температуры (рис. 3)

$$\partial\Theta(\xi, Fo) / \partial Fo = \partial^2\Theta(\xi, Fo) / \partial\xi^2, (Fo > 0; 0 < \xi < 1), \quad (27)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1 - \xi, \quad (28)$$

$$\Theta(0, Fo) = 0, \quad (29)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0. \quad (30)$$

Введем ДИФ, характеризующую изменение градиента температуры во времени в точке $\xi = 1$

$$q(Fo) = \partial\Theta(1, Fo) / \partial\xi = \operatorname{tg} \alpha. \quad (31)$$

Решение задачи принимаем в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^n b_k(q) \varphi_k(\xi), \quad (32)$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\xi) = \sin(k\pi\xi)$, $(k = \overline{1, n})$ – координатные функции.

Формула (32) удовлетворяет условиям (29), (30). Коэффициенты $b_k(q)$ находятся из (31) и ДГУ вида

$$\partial^i \Theta(0, Fo) / \partial\xi^i = 0, \quad (33)$$

$$\partial^i \Theta(1, Fo) / \partial\xi^i = 0, (i = 2, 4, 6, \dots). \quad (34)$$

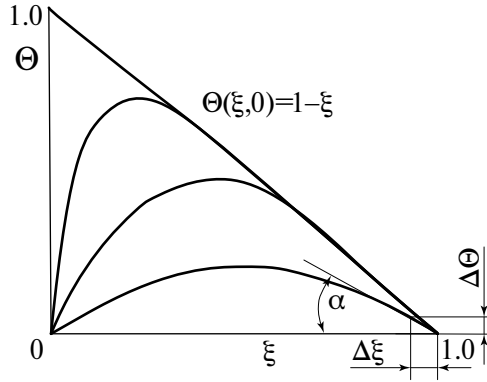


Рис. 3. Схема теплообмена.

Соотношение (32) удовлетворяет ДГУ (33), (34), что приводит к выполнению уравнения (27) в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ (в предельном смысле – при равенстве нулю всех его членов [15]).

Коэффициенты $b_k(q)$, ($k = \overline{1, n}$) соотношения (32) находятся из ДГУ, получаемых на основе соотношения (31) и уравнения (27). Их общая формула будет [12]

$$\partial^{2i+1} \Theta(1, Fo) / \partial \xi^{2i+1} = \partial^i q(Fo) / \partial Fo^i, (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (35)$$

В первом приближении, подставив (32) в (31), для $b_1(q)$ имеем алгебраическое уравнение. Его решение: $b_1(q) = q / \pi$. Соотношение (32) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = (q / \pi) \sin(\pi \xi). \quad (36)$$

Подставив (36) в (27), имеем

$$dq / dFo + \pi^2 q = 0. \quad (37)$$

Интеграл уравнения (37) будет

$$q(Fo) = C_1 \exp(-v_1 Fo),$$

где C_1 – постоянная интегрирования; $v_1 = \pi^2$ – первое собственное число, совпадающее с точной его величиной [2].

Соотношение (36) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = (C_1 \exp(-\pi^2 Fo) \sin(\pi \xi)) / \pi. \quad (38)$$

Постоянная интегрирования C_1 находится из начального условия (28)

$$(C_1 / \pi) \int_0^1 \sin^2(\pi \xi) d\xi = \int_0^1 (1 - \xi) \sin(\pi \xi) d\xi. \quad (39)$$

Из (39) находим $C_1 = 2$.

Во втором приближении подставим (32) в (31), (35) (при $i = 1$). Для $b_1(q)$ и $b_2(q)$ получаем два алгебраических уравнения. После их определения (32) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = -[(4\pi^2 q + q') \sin(\pi\xi) + (\pi^2 q + q') \sin(2\pi\xi)] / (3\pi^3). \quad (40)$$

Подставим (40) в (27)

$$q'' + 5\pi^2 q' + 4\pi^4 q = 0. \quad (41)$$

Интегрируя (41), имеем

$$q(Fo) = C_1 \exp(-v_1 Fo) + C_2 \exp(-v_2 Fo),$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования; $v_2 = 4\pi^2$ – второе собственное число, равное точному его значению [2].

Подставляя найденное $q(Fo)$ в (40), имеем

$$\Theta(\xi, Fo) = -\left[2C_1 e^{-\pi^2 Fo} \sin(\pi\xi) - C_2 e^{-4\pi^2 Fo} \sin(2\pi\xi) \right] / (2\pi). \quad (42)$$

Постоянные интегрирования C_1, C_2 находятся из начального условия (28)

$$-\int_0^1 [2C_1 \sin(\pi\xi) - C_2 \sin(2\pi\xi)] \sin(j\pi\xi) d\xi = 2\pi \int_0^1 (1 - \xi) \sin(j\pi\xi) d\xi, (j = 1, 2). \quad (43)$$

Из решения алгебраических уравнений (43) получаем $C_1 = -2$; $C_2 = 2$.

В третьем приближении подставим (32) в (31), (35) ($i = 1, 2$). Для $b_k(q)$, ($k = 1, 2, 3$) имеем систему трех алгебраических уравнений. Подставляя (32) с учетом полученных $b_k(q)$ в (27), находим

$$q''' + 14\pi^2 q'' + 49\pi^4 q' + 36\pi^6 q = 0.$$

Подставляя интеграл последнего уравнения в (32), имеем

$$\Theta(\xi, Fo) = -\frac{1}{6\pi} \left[6C_1 e^{-v_1 Fo} \sin(\pi\xi) + 3C_2 e^{-v_2 Fo} \sin(2\pi\xi) - 2C_3 e^{-v_3 Fo} \sin(3\pi\xi) \right], \quad (44)$$

где $v_3 = 9\pi^2$ – третье собственное число, совпадающее с точным его значением [2].

Для нахождения постоянных C_1, C_2, C_3 из выполнения начального условия (28) имеем систему трех алгебраических уравнений

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \sin(j\pi\xi) d\xi = \int_0^1 (1 - \xi) \sin(j\pi\xi) d\xi, (j = 1, 2, 3). \quad (45)$$

Ее решение: $C_k = 2(-1)^k$, ($k = 1, 2, 3$).

Аналогично было получено решение задачи в четвертом приближении

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = \frac{2}{\pi} & \left[e^{-\pi^2 Fo} \sin(\pi\xi) + \frac{e^{-4\pi^2 Fo}}{2} \sin(2\pi\xi) + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-9\pi^2 Fo}}{3} \sin(3\pi\xi) + \frac{e^{-16\pi^2 Fo}}{4} \sin(4\pi\xi) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Из анализа формул (38), (42), (44), (46), можно записать общую формулу для них, которая оказывается эквивалентной точному решению задачи (27)–(30) [2]

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^n A_k \exp(-v_k^2 Fo) \sin(v_k \xi), \quad (47)$$

где $v_k = k\pi$; $A_k = 2(-1)^k / v_k$.

3. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ – ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ ВРЕМЕНИ

Найдем решение краевой задачи теплопроводности для пластины с переменным во времени граничным условием

$$\partial\Theta(\xi, Fo) / \partial Fo = \partial^2\Theta(\xi, Fo) / \partial\xi^2, (Fo > 0; 0 < \xi < 1), \quad (48)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad (49)$$

$$\partial\Theta(0, Fo) / \partial\xi = 0, \quad (50)$$

$$\Theta(1, Fo) = BFo, \quad (51)$$

где $\Theta = (T - T_0) / T_0$; $Fo = a\tau / \delta^2$; $\xi = x / \delta$; $B = l\delta^2 / (aT_0)$; $l = dT(\delta, \tau) / d\tau$ – скорость изменения температуры в точке $x = \delta$; $B = d\Theta(1, Fo) / dFo$ – безразмерная скорость нагрева стенки; Θ – безразмерная температура; δ – толщина пластины.

Введем ДИФ, характеризующую изменение температуры в точке $\xi = 0$

$$q(Fo) = \Theta(0, Fo). \quad (52)$$

Решение задачи принимаем в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = B[Fo - (1/2)(1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^n b_k(q)\psi_k(\xi)], \quad (53)$$

где $b_k(q)$, $(k = \overline{1, n})$ – неизвестные коэффициенты; $\psi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi / 2)$, $(r = 2k - 1; k = \overline{1, n})$ – координатные функции.

Очевидно, что решение вида (53) удовлетворяет условиям (50), (51). Коэффициенты $b_k(q)$, $(k = \overline{1, n})$ будем определять из (52) и следующих ДГУ

$$\partial^2\Theta(1, Fo) / \partial\xi^2 = B, \quad (54)$$

$$\partial^i\Theta(0, Fo) / \partial\xi^i = 0; (i = 3, 5, 7, \dots), \quad (55)$$

$$\partial^i\Theta(1, Fo) / \partial\xi^i = 0; (i = 4, 6, 8, \dots). \quad (56)$$

Соотношение (54) с учетом $B = d\Theta(1, Fo) / dFo$ представляет уравнение (48) применительно к точке $\xi = 1$, которое будет выполнено в процессе получения

точного аналитического решения задачи (48)–(51). ДГУ (55), (56) ввиду принятой системы координатных удовлетворяются соотношением (53) в любом приближении.

Для определения коэффициентов $b_k(q)$ решения (53) используется соотношение (52) и ДГУ, получаемые на основе этого же соотношения и уравнения (48). Общая формула для них имеет вид [12]

$$\partial^{2i}\Theta(0, Fo) / \partial \xi^{2i} = \partial^i q(Fo) / \partial Fo^i, (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (57)$$

Для получения решения задачи (48)–(51) в первом приближении подставим (53) в (52). Отсюда находим: $b_1(q) = q(Fo) - BFo$. Соотношение (53) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = B \left[Fo - (1/2) \left((1 - \xi^2) + (2Fo - 1 + 2q/B) \cos(\pi\xi/2) \right) \right]. \quad (58)$$

Подставляя (58) в (48) и требуя выполнения полученного соотношения в любой точке пространственной переменной ($\xi \neq 1$), получаем

$$8q' - 2\pi^2 q = B(8 + \pi^2(2Fo - 1)).$$

Интегрируя последнее уравнение и подставляя полученное решение в (58), находим

$$\Theta(\xi, Fo) = B \left(Fo - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \frac{C_1}{B} \exp\left(-\frac{\pi^2 Fo}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) \right). \quad (59)$$

После определения постоянной интегрирования C_1 из интеграла невязки начального условия (49) соотношение (58) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = B \left(Fo - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \frac{16}{\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi^2 Fo}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) \right). \quad (60)$$

При получении решения во втором приближении после подстановки (53) в (52), (57) ($i = 1$) относительно $b_1(q)$ и $b_2(q)$ имеем систему двух уравнений. С учетом их значений соотношение (53) принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = B \left[Fo - (1/2)(1 - \xi^2) + \eta_3(8q' + 18\pi^2 q - B\eta_1) \times \right. \\ \left. \times \cos(\pi\xi/2) - \eta_3(8q' + 2\pi^2 q - B\eta_2) \cos(\pi\xi/2) \right], \end{aligned} \quad (61)$$

где $\eta_1 = 8 + 9\pi^2(2Fo - 1)$; $\eta_2 = 8 + \pi^2(2Fo - 1)$; $\eta_3 = 1/(16\pi^2 B)$; $\eta_4 = 1/(\pi^2 B)$.

Подставляя (61) в (48) ($\xi \neq 1$), находим

$$32q'' + 80\pi^2 q' - B\pi^4 (80 + 9\pi^2(2Fo - 1)) = 0. \quad (62)$$

После определения функции $q(Fo)$ из уравнения (62) и констант интегрирования из (49) решение во втором приближении будет

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = \frac{B}{54\pi^3} \left(27\pi^3 (Fo - 1 - \xi^2) + \right. \\ \left. + 864e^{-\frac{\pi^2 Fo}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + 32e^{-\frac{9\pi^2 Fo}{4}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) \right). \end{aligned} \quad (63)$$

В третьем приближении, подставляя (53) в (52), (58) ($i = 1, 2$), для коэффициентов $b_k(q)$, ($k = 1, 2, 3$) имеем систему трех алгебраических уравнений. Повторяя изложенный выше алгоритм, получаем следующую формулу для безразмерной температуры

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{B}{\pi^3} \left[\pi^3 (Fo - \frac{1}{2}(1 - \xi^2)) + 16e^{-\frac{\pi^2 Fo}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - \frac{16}{27}e^{-\frac{9\pi^2 Fo}{4}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) + \frac{16}{125}e^{-\frac{25\pi^2 Fo}{4}} \cos\left(\frac{5\pi}{2}\xi\right) \right] \quad (64)$$

На основе формул (60), (63), (64) получаем общую формулу решения задачи (48)–(51)

$$\Theta(\xi, Fo) = B \left[Fo - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^n \frac{4(-1)^{k+1}}{r\pi} e^{-\left(\frac{r\pi}{2}\right)^2 Fo} \frac{1}{(r\pi/2)^2} \cos\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) \right], \quad (65)$$

где $r = 2k - 1$.

Соотношение (65) при $n \rightarrow \infty$ представляет точное аналитическое решение задачи (48)–(51) [2].

4. ПОСТОЯННЫЙ ВНУТРЕННИЙ ИСТОЧНИК ТЕПЛОТЫ

В качестве последующего примера рассмотрим получение точного аналитического решения задачи теплопроводности для пластины с постоянным внутренним источником теплоты в математической постановке вида

$$\partial\Theta(\xi, Fo)/\partial Fo = \partial^2\Theta(\xi, Fo)/\partial\xi^2 + Po, (Fo > 0; 0 < \xi < 1), \quad (66)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad (67)$$

$$\partial\Theta(0, Fo) / \partial\xi = 0, \quad (68)$$

$$\Theta(1, Fo) = 1, \quad (69)$$

где $Po = \omega\delta^2/[\lambda(T_{CT} - T_0)]$ – число Померанцева; ω – мощность внутреннего источника теплоты; δ – толщина пластины; λ – коэффициент теплопроводности; $\Theta = (T - T_0) / (T_{CT} - T_0)$ – безразмерная температура.

ДИФ в данном случае представляется в виде (52). Решение задачи будем разыскивать в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \frac{Po}{2}(1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^n b_k(q)\varphi_k(\xi), \quad (70)$$

где $b_k(q)$, $(k = \overline{1, n})$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi / 2)$, $(r = 2k - 1; k = \overline{1, n})$ – координатные функции.

Решение (70) удовлетворяет условиям (68), (69). Коэффициенты $b_k(q)$, $(k = \overline{1, n})$ будем находить из (52) и ДГУ, определяемых по формулам (55)–(57).

Первым ДГУ применительно к точке $\xi = 0$ является соотношение

$$\frac{\partial q(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + \text{Po}, \quad (71)$$

которое не описывается общей формулой (57). Данное соотношение будет выполнено при нахождении коэффициентов $b_1(q)$ и $b_2(q)$ во 2-ом приближении. Очевидно, что соотношение (70) удовлетворяет ДГУ (55), (56). Для получения первого приближения подставим (70) в (52). Для $b_1(q)$ будем иметь алгебраическое уравнение. Его решение: $b_1(q) = q(\text{Fo}) - 1 - \text{Po} / 2$. Соотношение (70) с учетом $b_1(q)$ будет

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + \text{Po}(1 - \xi^2) / 2 + (q - 1 - \text{Po} / 2) \cos(\pi\xi / 2). \quad (72)$$

Подставляя (72) в (66), находим

$$8dq / d\text{Fo} + 2\pi^2 q - \pi^2(2 + \text{Po}) = 0. \quad (73)$$

Интегрируя уравнение (73) и подставляя его решение в (72), находим

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + \text{Po}(1 - \xi^2) / 2 + C_1 \exp(-\pi^2 \text{Fo} / 4) \cos(\pi\xi / 2). \quad (74)$$

Постоянная C_1 находится из условия (67)

$$\int_0^1 \left[1 + \text{Po}(1 - \xi^2) / 2 + C_1 \cos(\pi\xi / 2) \right] \cos(\pi\xi / 2) d\xi = 0. \quad (75)$$

Определяя интегралы, находим

$$C_1 = -4(\pi^2 - 4\text{Po}) / \pi^3. \quad (76)$$

Отметим, что уравнение (73) может быть получено применительно к любой точке переменной ξ ($0 \leq \xi \leq 1$), за исключением $\xi = 1$, где уравнение (66) удовлетворяется в предельном смысле – при равенстве нулю всех его слагаемых.

Для получения второго приближения подставим (70) в (52), (71). Для $b_1(q)$ и $b_2(q)$ получаем систему двух алгебраических уравнений. Соотношение (70) после их определения принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \text{Fo}) = & 1 + \text{Po}(1 - \xi^2) / 2 + \\ & + \left[\frac{q'}{2\pi^2} + \frac{9}{8} \left(q - 1 - \frac{\text{Po}}{2} \right) \right] \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + \\ & + \left[\frac{1}{8} \left(1 + \frac{\text{Po}}{2} - q \right) - \frac{q'}{2\pi^2} \right] \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right). \end{aligned} \quad (77)$$

Подставим (77) в (66)

$$16q'' / \pi^4 + 40q' / \pi^2 + 9(q - 1 - \text{Po} / 2) = 0. \quad (78)$$

Интегрируя (78) и подставляя $q(\text{Fo})$ в (77), находим

$$\Theta(\xi, 0) = 1 + \frac{\text{Po}}{2}(1 - \xi^2) + C_1 e^{-v_1 \text{Fo}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + C_2 e^{-v_2 \text{Fo}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right), \quad (79)$$

где $v_1 = \pi^2 / 4$; $v_2 = 9\pi^2 / 4$ – собственные числа, равные точным их величинам [2].

Постоянные C_1 и C_2 находятся из (67), выполняя требование ортогональности невязки начального условия функциям $\varphi_j(\xi) = \cos(j\pi\xi / 2)$ $j = r = 2k - 1$, $k = 1, 2$

$$\int_0^1 \left[1 + \frac{\text{Po}}{2}(1 - \xi^2) + C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + C_2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) \right] \cos\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right) d\xi = 0, (j = 1, 3). \quad (80)$$

Вследствие ортогональности косинусов система уравнений (80) разделяется (каждое уравнение содержит одно неизвестное). Отсюда получаем: $C_1 = -4(\pi^2 + 4\text{Po}) / \pi^3$; $C_2 = 4(9\pi^2 + 4\text{Po}) / (27\pi^3)$.

Соотношение (69) принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, 0) = 1 + \frac{\text{Po}}{2}(1 - \xi^2) - \frac{4}{\pi^3}(\pi^2 + 4\text{Po})e^{-v_1 \text{Fo}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + \\ + \frac{4}{27\pi^3}(9\pi^2 + 4\text{Po})e^{-v_2 \text{Fo}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right). \end{aligned} \quad (81)$$

В третьем приближении для получения $b_k(q)$, ($k = 1, 2, 3$) используются условия (52), (71), (57) (при $i = 1$). Относительно $q(\text{Fo})$ будем иметь дифференциальное уравнение 3-го порядка, постоянные интегрирования которого находятся из (67). Решение в третьем приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + \text{Po}(1 - \xi) / 2 + \\ + \sum_{k=1}^n A_k (1 + \text{Po} / v_k^2) e^{-v_k^2 \text{Fo}} \cos(v_k \xi), \end{aligned} \quad (82)$$

где $A_k = 4(-1)^{k+1} / (r\pi)$; $v_k = r^2 \pi^2 / 4$; $r = 2k - 1$.

Анализ соотношения (82) позволяет заключить, что коэффициенты A_k и собственные числа v_k совпадают с точными их значениями. Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ соотношение (82) представляет точное аналитическое решение задачи (66)–(69) [2].

5. НЕСИММЕТРИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА

Найдем решение задачи теплопроводности для пластины при несимметричных граничных условиях 1-го рода (рис. 4)

$$\partial\Theta(\xi, \text{Fo}) / \partial\text{Fo} = \partial^2\Theta(\xi, \text{Fo}) / \partial\xi^2, (\text{Fo} > 0; 0 < \xi < 1), \quad (83)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad (84)$$

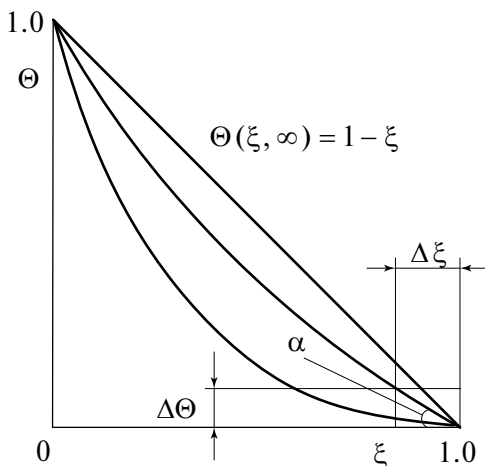


Рис. 4. Расчетная схема теплообмена.

$$\Theta(0, Fo) = 1, \quad (85)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0, \quad (86)$$

где $\Theta = (T - T_0) / (T_{C1} - T_0)$; $Fo = a\tau / \delta^2$; $\xi = x / \delta$; T_C – начальная температура; T_{C1} – температура пластинки при $x = 0$; $T_{C2} = T_0$ – температура пластины при $x = \delta$; x – координата; δ – толщина пластины; $\xi = x / \delta$ – безразмерная координата; $Fo = a\tau / \delta^2$ – число Фурье; τ – время; a – коэффициент температуропроводности.

В точке $\xi = 1$ используем ДИФ

$$q(Fo) = \partial\Theta(1, Fo) / \partial\xi, \quad (87)$$

где α – угол наклона кривой температуры к оси ξ .

Решение будем искать в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi - \sum_{k=1}^n b_k(q) \varphi_k(\xi), \quad (88)$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\xi) = \sin(k\pi\xi)$ – координатные функции.

Решение (88) удовлетворяет условиям (85), (86). Для нахождения коэффициентов $b_k(q)$, ($k = 1, n$) используем соотношение (87) и ДГУ (7)–(9).

Очевидно, что решение (88) удовлетворяет ДГУ (7), (9), что приводит к выполнению уравнения (83) в граничных точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ (в предельном смысле).

В первом приближении подставим (88) в (87). Для $b_1(q)$ имеем алгебраическое уравнение, после решения которого (88) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi - [1 + q(Fo)] \sin(\pi\xi) / \pi. \quad (89)$$

Подставляя (89) в уравнение (83), положив ξ равным любому числу ($0 < \xi < 1$), находим

$$dq(\text{Fo}) / d\text{Fo} + (1 + q(\text{Fo})) = 0. \quad (90)$$

Определяя интеграл уравнения (90) и подставляя в (89), имеем

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \xi - \left(C_1 \exp(-\pi^2 \text{Fo}) \sin(\pi \xi) \right) / \pi. \quad (91)$$

Постоянная C_1 находится из условия ортогональности невязки начального условия (84) к координатной функции $\varphi_1(\xi)$

$$\int_0^1 \left(1 - \xi^2 - \frac{C_1}{\pi} \sin(\pi \xi) \right) \sin(\pi \xi) d\xi = 0. \quad (92)$$

Соотношение (92) относительно C_1 представляет алгебраическое уравнение. Его решение: $C_1 = 2$.

Во втором приближении после подстановки (88) в (87) и (8) ($i = 1$) для $b_1(q)$ и $b_2(q)$ получаем систему двух алгебраических уравнений. После их нахождения (88) будет

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \xi - \frac{\left[2(q' + 4\pi^2(1 + q)) \sin(\pi \xi) + (q' + \pi^2(1 - q)) \sin(2\pi \xi) \right]}{6\pi^3}. \quad (93)$$

Подставляя (93) в уравнение (83), находим

$$q'' + 5\pi^2 q' - 4\pi^4 q = 0. \quad (94)$$

Интегрируя (94), имеем

$$q(\text{Fo}) = C_1 \exp(-\pi^2 \text{Fo}) + C_2 \exp(-4\pi^2 \text{Fo}) - 1. \quad (95)$$

Подставим (95) в (93)

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \xi - C_1 e^{-\pi^2 \text{Fo}} \sin(\pi \xi) + 0,5 C_2 e^{-4\pi^2 \text{Fo}} \sin(2\pi \xi). \quad (96)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начального условия (84)

$$\int_0^1 [1 - \xi - C_1 \sin(\pi \xi) + 0,5 C_2 \sin(2\pi \xi)] \sin(j\pi \xi) d\xi = 0, (j = 1, 2). \quad (97)$$

Из (97) получаем: $C_1 = 2$; $C_2 = -2$.

В третьем приближении $b_1(q)$, $b_2(q)$, $b_3(q)$ находятся из условий (87) и (8) (при $i = 1, 2$). Соотношение (88) после их нахождения будет

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \xi - \frac{(36\pi^4(1 + q) + 13\pi^2 q'' + q'') \sin(\pi \xi)}{24\pi^5} - \\ - \frac{(9\pi^4(1 + q) + 10\pi^2 q' + q'') \sin(2\pi \xi)}{30\pi^5} \end{aligned} \quad (98)$$

$$-\frac{(4\pi^4(1+q) + 5\pi^2q' + q'')\sin(3\pi\xi)}{120\pi^5}.$$

Подставляя (98) в уравнение (83), находим

$$q''' + 14\pi^2q'' + 49\pi^4q' - 36\pi^6q = 0. \quad (99)$$

Интегрируя (99), получаем

$$q(\text{Fo}) = C_1 \exp(-\pi^2 \text{Fo}) + C_2 \exp(-4\pi^2 \text{Fo}) + C_3 \exp(-9\pi^2 \text{Fo}) - 1, \quad (100)$$

Постоянные интегрирования C_1 , C_2 , C_3 находятся из начального условия (84)

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \sin(j\pi\xi) d\xi = 0, (j = 1, 2, 3). \quad (101)$$

Из (101) получаем $C_1 = 2$; $C_2 = -2$; $C_3 = 2$.

После определения C_1 , C_2 , C_3 (98) будет

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \xi - \sum_{k=1}^3 \frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi} \exp(-k^2\pi^2 \text{Fo}) \sin(k\pi\xi). \quad (102)$$

Исходя из формул (91), (96), (102), получаем следующую общую формулу

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \xi - \sum_{k=1}^n A_k \exp(-v_k^2 \text{Fo}) \sin(v_k \xi), \quad (103)$$

где $A_k = 2(-1)^{k-1} / (k\pi)$; $v_k = k\pi$; $n = 3$.

Формула (103) при $n \rightarrow \infty$ совпадает с точным решением (см. [2], формула (45), стр. 103).

6. ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Рассмотрим применение изложенного выше метода для получения точного аналитического решения уравнения, описывающего изменение во времени скорости в плоском канале [17]

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = v \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2} + \frac{\Delta p}{\rho l}, \quad (104)$$

где v — скорость, м/с ; t — время, с ; y — поперечная координата, м ; Δp — перепад давлений по длине канала, Па ; l — длина канала, м ; v — кинематическая вязкость, $\text{м}^2/\text{с}$; ρ — плотность, кг/м^3 .

Рассмотрим получение решения уравнения (104) для случая, когда в начальный момент времени к неподвижной жидкости прилагается перепад давления, который не изменяется во времени. Краевые условия в данном случае имеют вид

$$v(y, 0) = 0, \quad (105)$$

$$\partial v(0, t) / \partial y = 0, \quad (106)$$

$$v(\delta, t) = 0, \quad (107)$$

где δ — половина ширины канала.

Обозначим

$$\eta = y / \delta; Zh = vt / \delta^2, \quad (108)$$

где η — безразмерная координата; Zh — число Жуковского.

С учетом (108) задача (104)–(107) будет

$$\frac{\partial v(\eta, Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial^2 v(\eta, Zh)}{\partial \eta^2} + \omega, (Zh > 0; 0 < \eta < 1), \quad (109)$$

$$v(\eta, 0) = 0, \quad (110)$$

$$\partial v(0, Zh) / \partial \eta = 0, \quad (111)$$

$$v(1, Zh) = 0, \quad (112)$$

где $\omega = \Delta p \delta^2 / (\nu l p)$.

Введем в рассмотрение ДИФ

$$q(Zh) = v(0, Zh), \quad (113)$$

характеризующую скорость в центре канала.

Решение задачи будем искать в виде

$$v(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) + \sum_{k=1}^n b_k(q) \varphi_k(\eta), \quad (114)$$

где $b_k(q)$, $\varphi_k(\eta) = \cos(r\pi\eta/2)$ — неизвестные коэффициенты и координатные функции ($r = 2k - 1$; $k = 1, n$).

Соотношение (114) удовлетворяет граничным условиям (111), (112). Коэффициенты $b_k(q)$ находятся из (113) и ДГУ, для получения которых продифференцируем (111), (112) по Zh

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial v(0, Zh)}{\partial Zh} \right) = 0, \quad (115)$$

$$\partial v(1, Zh) / \partial Zh = 0. \quad (116)$$

Уравнение (109) с учетом (116) приводится к ДГУ

$$\partial^2 v(1, Zh) / \partial \eta^2 + \omega = 0. \quad (117)$$

Дифференцируя (109) по η и сравнивая с соотношением (115), для точки $\eta = 0$ находим ДГУ

$$\partial^3 \mathfrak{v}(0, Zh) / \partial \eta^3 = 0. \quad (118)$$

Продифференцируем (117), (118) по Zh

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{v}(1, Zh)}{\partial Zh} \right) = 0, \quad (119)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \left(\frac{\partial \mathfrak{v}(0, Zh)}{\partial Zh} \right) = 0. \quad (120)$$

Дифференцируя (109) дважды и трижды по η и сравнивая полученные соотношения со (119), (120), находим ДГУ

$$\partial^4 \mathfrak{v}(1, Zh) / \partial \eta^4 = 0, \quad (121)$$

$$\partial^5 \mathfrak{v}(0, Zh) / \partial \eta^5 = 0. \quad (122)$$

Аналогично можно получить любое число ДГУ, общие формулы для которых будут

$$\partial^i \mathfrak{v}(0, Zh) / \partial \eta^i = 0, (i = 3, 5, 7, \dots), \quad (123)$$

$$\partial^i \mathfrak{v}(1, Zh) / \partial \eta^i = 0, (i = 4, 6, 8, \dots). \quad (124)$$

Учитывая, что решение вида (114) удовлетворяет ДГУ (117), (123), (124), коэффициенты $b_k(q)$, ($k = 1, n$) находятся из соотношения (113) и получаемых при его использовании ДГУ. Продифференцируем (113) по Zh

$$\frac{\partial q(Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial \mathfrak{v}(0, Zh)}{\partial Zh}. \quad (125)$$

Сравнивая (125) с уравнением (109), находим следующее ДГУ

$$\frac{\partial q(Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial^2 \mathfrak{v}(0, Zh)}{\partial \eta^2} + \omega. \quad (126)$$

Продифференцируем (126) по переменной Zh

$$\frac{\partial^2 q(Zh)}{\partial Zh^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{v}(0, Zh)}{\partial Zh} \right). \quad (127)$$

Подставляя в (127) правую часть уравнения (109), находим еще одно ДГУ

$$\frac{\partial^2 q(Zh)}{\partial Zh^2} = \frac{\partial^4 \mathfrak{v}(0, Zh)}{\partial \eta^4}. \quad (128)$$

Аналогично можно получить любое их количество, общая формула которых имеет вид

$$\frac{\partial^i q(Zh)}{\partial Zh^i} = \frac{\partial^{2i} \psi(0, Zh)}{\partial \eta^{2i}}, (i = 2, 3, 4, \dots). \quad (129)$$

В первом приближении подставляя (114) в (113), находим: $b_1(q) = q(Zh) - \omega / 2$. Подставляя $b_1(q)$ в (114), получаем

$$\psi(\eta, Zh) = \omega(1 - \eta^2) / 2 + (q(Zh) - \omega / 2) \cos(\pi\eta / 2). \quad (130)$$

Потребуем, чтобы (130) удовлетворяло (109) в любой точке $0 \leq \eta < 1$, исключая $\eta = 1$, где уравнение (109) выполняется в предельном смысле. Подставим (130) в (109)

$$8dq(Zh) / dZh + 2\pi^2 q(Zh) - \pi^2 \omega = 0. \quad (131)$$

Интегрируя (132), находим

$$q(Zh) = C_1 \exp(-\nu_1 Zh), \quad (132)$$

где C_1 — постоянная интегрирования; $\nu_1 = -\pi^2 / 4$ — первое собственное число, равное точному его значению [17].

Подставим (132) в (130)

$$\psi(\eta, Zh) = \omega(1 - \eta^2) / 2 + C_1 \exp(-\pi^2 Zh / 4) \cos(\pi\eta / 2). \quad (133)$$

Постоянная C_1 находится из начального условия (110)

$$\int_0^1 \left[\frac{\omega}{2} (1 - \eta^2) + C_1 \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta = 0. \quad (134)$$

Из (134) находим: $C_1(q) = -16\omega / \pi^3$.

С учетом C_1 (133) принимает вид

$$\psi(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2} (1 - \eta^2) - \frac{16\omega}{\pi^3} e^{-\frac{\pi^2 Zh}{4}} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right), \quad (135)$$

Во втором приближении подставим (114) в (113), (126). Для $b_1(q)$ и $b_2(q)$ будем иметь два алгебраических линейных уравнения. После определения $b_1(q)$ и $b_2(q)$ соотношение (114) будет

$$\begin{aligned} \psi(\eta, Zh) = & \frac{\omega}{2} (1 - \eta^2) - \frac{9\pi^2 \omega - 8dq(Zh) / dZh - 18\pi^2 q(Zh)}{16\pi^2} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \\ & + \frac{\pi^2 \omega - 8dq(Zh) / dZh - 2\pi^2 q(Zh)}{16\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right). \end{aligned} \quad (136)$$

Подставим (136) в (109)

$$\frac{32d^2 q(Zh)}{dZh^2} + \frac{80\pi^2 dq(Zh)}{dZh} + 18\pi^4 q(Zh) - \omega = 0. \quad (137)$$

Интеграл уравнения (137) имеет вид

$$v(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) + C_1 e^{-\frac{\pi^2 Zh}{4}} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + C_2 e^{-\frac{9\pi^2 Zh}{4}} \cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right). \quad (138)$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 находятся из начального условия (110)

$$\int_0^1 \left[\frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) + C_1 \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right) d\eta = 0, (j = 1, 3). \quad (139)$$

Из (139) находим: $C_1(q) = -16\omega / \pi^3$; $C_2(q) = 16\omega / 27\pi^3$. Соотношение (114) принимает вид

$$v(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) - \frac{16\omega}{\pi^3} e^{-\frac{\pi^2 Zh}{4}} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \frac{16}{27\pi^3} e^{-\frac{9\pi^2 Zh}{4}} \cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right). \quad (140)$$

В третьем приближении неизвестные коэффициенты $b_k(q)$, ($k = 1, 2, 3$) находятся из (113), (126), (129) ($i = 2$). Решение задачи в третьем приближении будет

$$v(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) + \sum_{k=1}^n \frac{16(-1)^k \omega}{r^3 \pi^3} e^{-\frac{r^2 \pi^2 Zh}{4}} \cos\left(\frac{r\pi\eta}{2}\right), (r = 2k - 1; n = 3). \quad (141)$$

Соотношение (141) при $n \rightarrow \infty$ представляет точное решение (109)–(112) [17]

$$v(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega e^{-\mu_k^2 Zh} \cos(\mu_k \eta), \quad (142)$$

где $A_k = 16(-1)^k / (r^3 \pi^3)$; $\mu_k = r\pi / 2$; $r = 2k - 1$.

7. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ РАСЧЕТА ФРОНТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В методах, использующих понятие глубины прогреваемого слоя, вводится допущение о конечной скорости переноса теплоты, несмотря на то что решается параболическое уравнение. В работах [11, 12, 16] показано, что с увеличением числа приближений скорость перемещения фронта возмущения устремляется к бесконечности. Следовательно, получаемое решение подтверждает факт бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой решением параболического уравнения. Таким образом, метод решения параболического уравнения, связанный с использованием понятия фронта температурного возмущения (ФТВ), что эквивалентно допущению о конечной скорости распространения теплоты, имеет определенные ограничения. Они связаны с ограничением скорости перемещения ФТВ. Как только эта скорость становится равной скорости распространения тепловой волны $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$, процесс получения решения можно считать законченным (где a – коэффициент теплопроводности, m^2/c ; τ_r – время релаксации, c). При известной величине времени релаксации скорость тепловой волны (v_T , m/c) может быть найдена до момента получения решения задачи определения температуры с использованием интегрального метода. Отметим, что учет времени релаксации приводит к гиперболическим уравнениям теплопроводности, включающим производные по времени высокого порядка, а также смешанные производные. Получение их аналитических решений

и расчет температуры при значениях времени, сопоставимых с временем релаксации, затруднительно. Интегральный метод теплового баланса, отличаясь простотой реализации, не имеет ограничений на величину времени, для которого выполняется расчет температуры. В связи с чем, он может использоваться как первый шаг решения гиперболического уравнения теплопроводности до момента времени, когда ФТВ достигает центра пластины.

Идею метода, основанного на использовании понятия фронта термического возмущения, рассмотрим на примере решения следующей краевой задачи для

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}, (Fo > 0; 0 < \xi < 1), \quad (143)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad (144)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1, \quad (145)$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial \xi = 0, \quad (146)$$

где $\Theta = (T - T_0) / (T_{CT} - T_0)$; $Fo = \alpha \tau / \delta^2$; $\xi = x / \delta$.

Введем в рассмотрение движущуюся границу (фронт температурного возмущения), разделяющую область $0 \leq \xi \leq 1$ на две: $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$ и $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$, где $q_1(Fo)$ – подвижная граница, принимаемая за ДИФ (рис. 5). В области за подвижной границей сохраняется начальная температура. При $Fo = Fo_1$ первая стадия заканчивается (подвижная граница достигает центра пластины, $\xi = 1$). Во второй стадии изменение температуры происходит во всем объеме тела $0 \leq \xi \leq 1$. Решение параболического и гиперболического уравнений в этой стадии совпадают.

Математическая постановка для первой стадии имеет вид [16]

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}, (0 < Fo \leq Fo_1; 0 \leq \xi \leq q_1(Fo)), \quad (147)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1, \quad (148)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = 0, \quad (149)$$

$$\partial \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi = 0. \quad (150)$$

В параболическом уравнении (147) заложена бесконечная скорость распространения теплоты. Поэтому понятие фронта возмущения здесь вводится условно. Далее будет показано, что при увеличении числа приближений n время Fo_1 , когда фронт температурного возмущения достигает центра пластины, уменьшается и, при $n \rightarrow \infty$ $Fo_1 \rightarrow 0$. Следовательно, решение задачи (147)–(150) при $n \rightarrow \infty$ будет описывать бесконечную скорость перемещения теплоты. Если найти число приближений n , при котором скорость перемещения ФТВ будет совпадать со скоростью тепловой волны ϑ_T , то полученное решение будет эквивалентно решению гиперболического уравнения теплопроводности в диапазоне времени $0 \leq Fo \leq Fo_1$.

Представим решение задачи (147)–(150) в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^n a_k(q_1) \varphi_k(\xi), \quad (151)$$

где $a_k(q_1)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\xi) = \xi^{2k-1}$ – координатные функции.

Решение (151) удовлетворяет условию (148). Подставляя (151) в (149), (150), находим: $a_1 = -3 / 2q_1$; $a_2 = 1 / (2q_1^3)$. Соотношение (151) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^2 (-1)^k A_k \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^{2k-1}, \quad (152)$$

где $A_1 = 1.5$; $A_2 = 0.5$.

Интеграл теплового баланса уравнения (147) будет

$$\int_0^{q_1(Fo)} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^{q_1(Fo)} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (153)$$

Подставим (152) в (153)

$$q_1 dq_1 = 4dFo. \quad (154)$$

Интеграл уравнения (154), с учетом $q_1(0) = 0$, имеет вид

$$q_1(Fo) = \sqrt{8Fo}. \quad (155)$$

Положив $q_1(Fo_1) = 1$, находим: $Fo_1 = 1 / 8 = 0.125$.

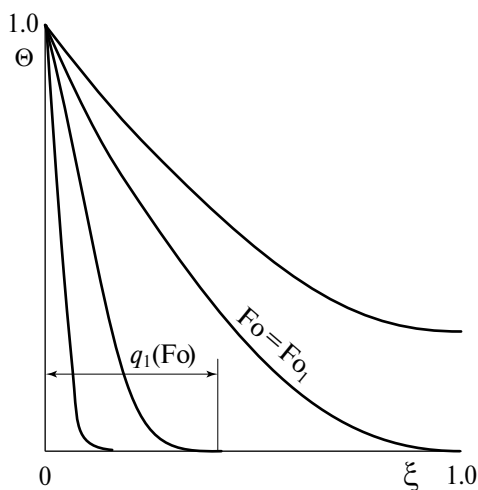


Рис. 5. Схема теплообмена.

Формулы (152), (155) являются решением задачи (147)–(150) во втором приближении.

Анализ расчетов по (152) позволяет заключить, что максимальное расхождение с точным решением [2] наблюдается при $Fo = Fo_1$ и составляет 9%.

Повышение точности решения связано с использованием ДГУ, определяемых в таком виде, чтобы их выполнение приводило к выполнению уравнения (147) в точках $\xi = 0$ и $\xi = q_1(Fo)$. Общие формулы для них имеют вид [16]

$$\partial^i \Theta(0, Fo) / \partial \xi^i = 0, (i = 2, 4, 6, 8, \dots), \quad (156)$$

$$\partial^i \Theta(q_1, Fo) / \partial \xi^i = 0, (i = 2, 3, 4, 5, \dots). \quad (157)$$

Очевидно, что, благодаря нечетным степеням переменной ξ в координатных функциях, соотношение (151) удовлетворяет ДГУ (156) в любом приближении.

В третьем приближении, подставляя (151) в (149), (150), (157) ($i = 2$), для коэффициентов $a_k(q_1)$, ($k = 1, 2, 3$) имеем цепочную систему трех алгебраических уравнений. Ее решение: $a = -15 / (8q_1)$; $a_2 = 5 / (8q_1^3)$; $a_3 = -3 / (8q_1^3)$.

Соотношение (151) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^3 (-1)^k A_k \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^{2k-1}, \quad (158)$$

где $A_1 = 15 / 8$; $A_2 = 5 / 8$; $A_3 = 3 / 8$.

Подставим (158) в (153)

$$q_1 dq_1 = 6dFo. \quad (159)$$

Интегрируя уравнение (158), с учетом $q_1(0) = 0$ находим

$$q_1(Fo) = \sqrt{12Fo}. \quad (160)$$

Приняв $q_1(Fo_1) = 1$, получаем $Fo_1 = 1 / 12 \approx 0.083333$.

В четвертом приближении используются условия (149), (150), (157) ($i = 2, 3$). Соотношение (151) приводится к виду

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^3 (-1)^k A_k \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^{2k-1}, \quad (161)$$

где $A_1 = 35 / 16$; $A_2 = 35 / 16$; $A_3 = 21 / 16$; $A_4 = 5 / 16$.

Подставим (161) в (153)

$$q_1 dq_1 = 8dFo. \quad (162)$$

Интеграл уравнения (162), при $q_1(0) = 0$, будет

$$q_1(Fo) = \sqrt{16Fo}. \quad (163)$$

Приняв $q_1(Fo_1) = 1$, находим: $Fo_1 = 1 / 16 \approx 0.0625$.

В пятом приближении получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^5 (-1)^k A_k \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^{2k-1}, \quad (164)$$

где $A_1 = \frac{315}{128}$; $A_2 = \frac{105}{32}$; $A_3 = \frac{189}{64}$; $A_4 = \frac{45}{32}$; $A_5 = \frac{35}{128}$.

Уравнение для $q_1(Fo)$ и его решение будут

$$q_1 dq_1 = 10dFo, \quad (165)$$

$$q_1(Fo) = \sqrt{20Fo}. \quad (166)$$

При $q_1(Fo_1) = 1$ $Fo_1 = 1 / 20$.

Таким путем можно получить решение в любом приближении. Уравнения для $q_1(Fo)$ отличаются лишь коэффициентом в правой части, который в каждом последующем приближении увеличивается на две единицы (см. уравнения (154), (159), (162), (165)). Решения уравнения для $q_1(Fo)$ отличаются лишь коэффициентом под знаком корня, увеличивающимся в каждом последующем приближении на четыре единицы (см. соотношения (155), (160), (163), (166)). Учитывая отмеченные закономерности, можно записать общие формулы уравнений относительно $q_1(Fo)$ и их решений в зависимости от числа приближений n

$$q_1(Fo)dq_1(Fo) = 2ndFo, \quad (167)$$

$$q_1(Fo) = \sqrt{4nFo}. \quad (168)$$

Общая формула для времени окончания первой стадии, то есть, когда $q_1(Fo_1) = 1$, имеет вид

$$Fo_1 = 1 / (4n). \quad (169)$$

Таким образом, при получении решения задачи (147)–(150) в любом приближении требуется найти лишь неизвестные коэффициенты $a_k(q_1)$, определяемые из основных (149), (150) и дополнительных (157) граничных условий. Общий вид решения при любом количестве приближений будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k A_k \left[\frac{\xi}{q_1(Fo)} \right]^{2k-1}, \quad (170)$$

где A_k – постоянные, определяемые из (149), (150), (157) (при $i = 2, 3, 4, 5, \dots, n-1$); $q_1(Fo)$ находится по формуле (168).

Результаты исследований закономерности перемещения фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$ для 2, 3, 5, 20 и 30-го приближений приведены на рис. 6. Их анализ позволяет сделать вывод, что с увеличением числа приближений время (Fo_1) достижения фронтом возмущения координаты $\xi = 1$ уменьшается (отметим, что величина Fo_1 в 20-ом и 30-ом приближениях соответственно составляет $Fo_1 = 0.025$ и $Fo_1 = 0.0125$). И, в пределе, при $n \rightarrow \infty$ $Fo_1 \rightarrow 0$, что согласуется с гипотезой

о бесконечной скорости распространения теплового возмущения, описываемой уравнением (147), согласно которой сразу после приложения граничного условия $\Theta(0, Fo) = 1$ температура во всем диапазоне координаты $0 \leq \xi \leq 1$, включая центр пластины ($\xi = 1$), не совпадает с начальной.

Анализ результатов расчетов для 2, 3, 5, 20, 30-го приближений в сопоставлении с точным решением [2] позволяет заключить, что с увеличением числа приближений решение уточняется, приближаясь к точному. Так уже в 20-ом приближении отличие от точного решения не превышает 1 %, а в 30-ом — практически совпадает с ним. Результаты расчетов для сверхмалых величин времени ($10^{-8} \leq Fo \leq 10^{-12}$) даны на рис. 7. Следует подчеркнуть трудности нахождения точного решения по формулам из [2] для столь малых величин Фурье из-за необходимости применения большого числа членов ряда. Расчеты показывают, что при $Fo = 10^{-7}$ для обеспечения сходимости точного решения следует использовать 2000 членов ряда (формула (1.16), на стр. 87 из [2]). Для чисел $Fo = 10^{-8}$; 10^{-9} ; 10^{-10} ; 10^{-11} ; 10^{-12} сходимость точного решения наступает, соответственно, при следующих числах членов ряда: 5×10^3 ; 1×10^4 ; 5×10^4 ; 2×10^5 ; 5×10^5 .

Недостатки классических точных аналитических решений параболических уравнений состоят в невозможности описания температуры в начальном диапазоне времени, сопоставимом с временем свободного пробега микрочастиц (носителей энергии — молекул, атомов, электронов, ионов, фононов и др.), а также в нанобъектах (например, нанопленках) с размерами, сопоставимыми с длиной их свободного пробега. Исследование температуры в указанном пространственно-временном

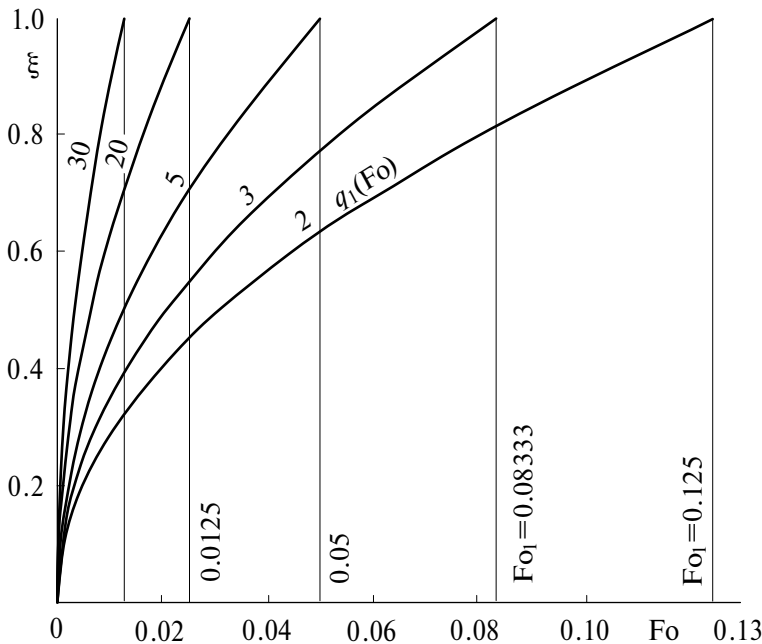


Рис. 6. Перемещение фронта теплового возмущения $q_1(Fo)$. 2, 3, 5, 20, 30 — номер приближения.

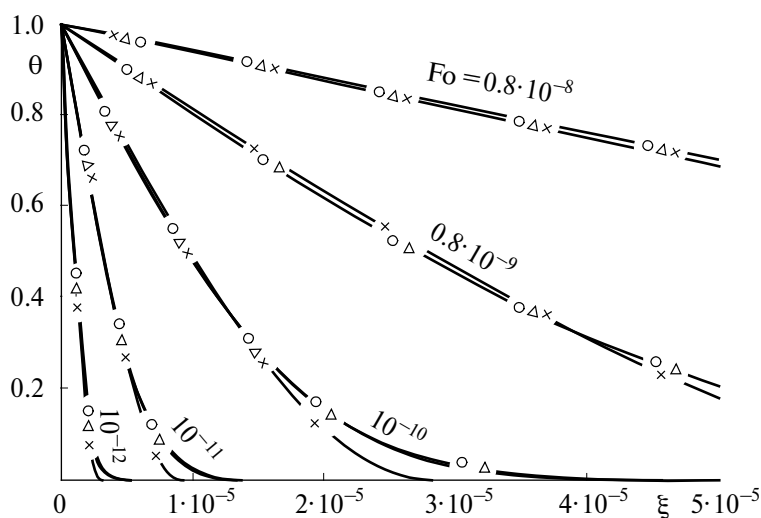


Рис. 7. Распределение температуры: $\times$ – 2-е приближение первой стадии; Δ – 20-е приближение первой стадии; o – точное решение.

диапазоне возможно лишь на моделях, учитывающих конечную скорость распространения теплоты. Такие модели описываются сложными гиперболическими уравнениями теплопроводности, учитывающими пространственно – временную нелокальность реальных физических процессов. Аналитические решения для этих моделей (если их удастся получить) включают две компоненты, одна из которых описывает диффузионное распространение теплоты, а вторая – волновое или баллистическое [11, 12]. Их анализ крайне затруднителен и особенно, когда требуется получать решения для малых и сверхмалых значений начального временного участка, сопоставимых со временем релаксации, а также для пластин сверхмалой толщины.

С целью анализа реального изменения температуры на начальном временном участке можно использовать полученное выше решение параболического уравнения для первой стадии, где было введено допущение о конечной скорости распространения теплоты. Известно, что скорость тепловой волны для любой конкретной среды можно найти по формуле [2]

$$v = \sqrt{a / \tau_r}, \quad (171)$$

где τ_r – время релаксации, с.

Скорость тепловой волны можно также найти из соотношения (169), определяющего безразмерное время окончания первой стадии процесса в любом приближении. Учитывая, что $Fo_1 = a\tau_1 / \delta^2$, при известных коэффициенте теплопроводности a и толщине пластины δ можно найти размерное время окончания первой стадии процесса τ_1 . Скорость тепловой волны в данном случае определяется по соотношению

$$v^* = \delta / \tau_1. \quad (172)$$

Используя соотношение (169), путем изменения числа приближений n , можно найти такое Fo_1 , чтобы скорости v и v^* совпадали. После определения v^* получение последующих приближений представляется нецелесообразным, так как получаемое решение для безразмерной температуры вида (170), приближаясь к точному аналитическому решению параболического уравнения теплопроводности, как уже указывалось выше, не может быть использовано при сверхмалых значениях времени.

ВЫВОДЫ

1. Выполнены детальные исследования метода получения точных аналитических решений краевых задач, основанного на определении ДИФ и ДГУ. ДИФ позволяет сводить уравнение в частных производных к обыкновенному уравнению, из решения которого находятся собственные числа краевой задачи. Собственные числа в данном случае находятся из временного дифференциального уравнения относительно ДИФ в отличие от классических методов, где они определяются из краевой задачи Штурма–Лиувилля, поставленной в пространственной переменной. Следовательно, в настоящей работе рассматривается другое направление определения собственных чисел. ДГУ представляются в таком виде, чтобы их удовлетворение было равносильно удовлетворению исходного дифференциального уравнения в точках границы ($\xi = 0$ и $\xi = 1$). Показано, что уравнение в этом случае выполняется и внутри области ($0 \leq \xi \leq 1$), исключая его интегрирование по пространственной координате.

2. Для получения решений при малых значениях времени используется интегральный метод теплового баланса, основанный на определении фронта температурного возмущения (ФТВ), применяемого в качестве дополнительной искомой функции. Принятие ФТВ означает введение допущения о конечности скорости распространения теплоты, несмотря на то, что решению подлежит параболическое уравнение. Показано, что увеличение числа приближений приводит к возрастанию скорости перемещения ФТВ и при $n \rightarrow \infty$ она устремляется к бесконечности. Следовательно, факт бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой параболическим уравнением, подтверждается. Сопоставляя решения гиперболического и параболического уравнений, найдено число приближений, при котором их решения совпадают. В связи с чем, для определения температурного состояния конструкций при малых значениях времени можно использовать решение параболического уравнения, полученное на основе ФТВ.

3. Преимуществом методов, основанных на определении ДГУ и ДИФ, является алгебраизация получаемых решений. И, в частности, независимо от вида дифференциальных операторов, включая уравнения для тел с цилиндрической и сферической симметрией, а также нелинейные уравнения, решения не содержат специальных функций (Бесселя, Неймана, Вебера и др.) и включают лишь степенные (или тригонометрические) координатные функции с коэффициентами, экспоненциально стабилизирующимися во времени.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2024-0014) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
2. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
4. *Канторович Л.В.* Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Прикл. мат. и механ. 1942. Т. 6. № 1. С. 31–40.
5. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
6. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.
7. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975. 208 с.
8. *Кот В.А.* Метод взвешенной температурной функции // Инженерно–физический журн. 2016. Т. 19. № 1. С. 183–202.
9. *Глазунов Ю.Т.* Вариационные методы. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Институт компьютерных исследований. 2006. 470 с.
10. *Гудмен Т.* Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. Сб. науч. тр. М.: Атомиздат, 1967. С. 41–96.
11. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. М.: ИНФРА–М, 2013. 391 с.
12. *Кудинов И.В., Еремин А.В., Трубицын К.В., Стефанюк Е.В.* Модели термомеханики с конечной и бесконечной скоростью распространения теплоты. М.: Проспект, 2020. 224 с.
13. *Карташов Э.М., Кудинов В.А., Калашиников В.В.* Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. М.: Издательство Юрайт, 2018. 435 с.
14. *Цой П.М.* Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. М: Издательство МЭИ, 2005. 568 с.
15. *Фёдоров О.М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000. 220 с.
16. *Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А.* Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искоемых функций. Сибирский журн. вычислительной математики. Новосибирск, 2019. Т. 22. С. 153–165.
17. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.

Additional Conditions in Boundary Value Problems of Heat Conduction (Review)

V. A. Kudinov*, K. V. Trubitsyn, E. V. Kotova, T. E. Gavrilova, V. K. Tkachev

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

**e-mail: totig@yandex.ru*

A review of studies related to the use of additional boundary conditions (ADBs) and additional sought functions (ADFs) in obtaining analytical solutions to heat conduction problems is presented. ADBs allow the equation to be executed at the boundaries, which leads to its execution inside the domain, excluding direct integration over the spatial coordinate. ADF allows one to reduce a partial differential equation to an ordinary differential equation, from the solution of which the eigenvalues of the boundary value problem are found. Eigenvalues in classical methods are found from the solution of the Sturm–Liouville boundary value problem formulated in the domain of a spatial variable. Consequently, the method used in this work leads to another algorithm for their determination, based on the solution of a temporary differential equation, the order of which is determined by the number of approximations of the resulting solution. In a problem based on determining the front of a temperature disturbance, the equivalence of solutions to the parabolic and hyperbolic heat equations was found. And, in particular, a number of approximations have been found that limit the speed of propagation of a thermal wave in the solution of a parabolic equation to a value equal to its real value for a specific material, at which it coincides with the solution of the hyperbolic equation.

Keywords: boundary value problems, analytical solutions, differential theory, finite speed of heat propagation, temperature disturbance front, parabolic and hyperbolic heat equations