ИЗВЕСТИЯ РАН. ЭНЕРГЕТИКА, 2024, № 1, с. 63–69

УДК 536.2

РЕАЛИЗУЕМОСТЬ РЕЖИМА ТЕРМОСТАТИРОВАНИЯ ГРАНИЦЫ ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ОБЛАДАЮЩЕГО ПЛЕНОЧНЫМ ПОКРЫТИЕМ

© 2024 г. А. В. Аттетков*, П. А. Власов, И. К. Волков, А. В. Котович**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», Москва, Россия

**e-mail: fn2@bmstu.ru*

***e-mail: shurik.kot@gmail.com*

Поступила в редакцию 04.03.2023 г.
После доработки 04.06.2024 г.
Принята к публикации 07.06.2024 г.

Сформулирована задача определения температурного поля изотропного полупространства с пленочным покрытием его поверхности в условиях теплообмена с внешней средой. Исследован нестационарный режим теплообмена с изменяющимися во времени коэффициентом теплоотдачи и температурой внешней среды. Идентифицированы достаточные условия, выполнение которых обеспечивает возможность реализации автомодельного процесса теплопереноса в анализируемой системе. Качественно исследованы физические свойства изучаемого автомодельного процесса, и установлены его особенности. Теоретически обоснована возможность реализации режима термостатирования границы изотропного полупространства, обладающего пленочным покрытием, при нестационарном теплообмене с внешней средой.

Ключевые слова: изотропное полупространство, пленочное покрытие, нестационарный теплообмен, температурное поле, автомодельное решение

DOI: 10.31857/S0002331024010082

ВВЕДЕНИЕ

Автомодельные («самоподобные») процессы теплопереноса [1–5] занимают важное место в математической теории теплопроводности твердых тел [4–9]. В [10] приведен пример автомодельных решений, иллюстрирующих свойства автомодельных процессов теплопереноса в изотропном твердом теле со сферическим очагом разогрева – шаровой полостью, заполненной высокотемпературным газом. Теоретически обоснована возможность реализации режима термостатирования границы очага разогрева при нестационарном теплообмене в системе. Дальнейшее развитие эти исследования получили в работах [11, 12], результаты которых устанавливают особенности влияния покрытия границы сферического очага разогрева на изучаемый автомодельный процесс теплопереноса.

В [13] представлены результаты исследований автомодельных процессов теплопереноса в изотропном полупространстве с неподвижной или движущейся по заданному закону границей при наличии на ней изотропного покрытия постоянной толщины. Анализируемая математическая модель предполагает, что покрытие является термически тонким, т.е. для него допустима реализация идеи «сосредоточенная емкость» [7]. Практический интерес представляет корректное уточнение данной модели путем реализации идеи «уточненная модель сосредоточенной емкости» [7]. Достаточные условия ее применимости определены в [14]. Заметим, что указанная математическая модель не предполагает использование гипотезы о том, что покрытие является термически тонким.

Цель проведенных исследований – идентификация достаточных условий, выполнение которых приводит к возможности реализации автомодельного процесса теплопереноса в изучаемой двуслойной системе при нестационарном теплообмене с внешней средой.

ИСХОДНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В качестве объекта исследований рассматривается изотропное полупространство с изотропным покрытием постоянной толщины. При этом предполагается, что:

1) начальная температура T_0 объекта исследований постоянна, и реализуются нестационарные режимы теплообмена с внешней средой при переменных во времени коэффициенте теплоотдачи $\alpha(t)$ и температуре внешней среды $T_c(t)$;

2) в системе «полупространство–покрытие» реализуются условия идеального теплового контакта [2, 3];

3) изотропное покрытие не является термически тонким, т.е. для него не может быть реализована идея «сосредоточенная емкость» [7];

4) если среднеинтегральная по толщине покрытия температура

$$\langle T(t)\rangle = \frac{1}{h_*}\int_{-h_*}^{0} T(x,t)\,dx,$$

то допустимо принятие следующей гипотезы: «механизм» теплообмена в системе «полупространство–покрытие» может быть аппроксимирован законом Фурье–Ньютона–Рихмана:

$$\lambda \left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0+0} = \mu_*\left[\left.T(x,t)\right|_{x=0+0} - \langle T(t)\rangle\right]$$

с коэффициентом теплоотдачи μ_* при условии равенства среднеинтегральной температуры покрытия температуре его границ, т.е.

$$T(-h_* + 0,t) = \langle T(t)\rangle = T(0-0,t), \quad t \ge 0,$$

где λ – теплопроводность изотропного полупространства.

Заметим, что принятие сформулированной гипотезы фактически означает принятие гипотезы о допустимости реализации идеи «уточненная модель сосредоточенной емкости».

Для удобства дальнейших рассуждений воспользуемся следующими обозначениями:

$$\mathrm{Fo} = \frac{at}{x_*^2};\ \xi = \frac{x}{x_*};\ \theta = \frac{T - T_0}{T_{c0} - T_0};\ \zeta = \frac{T_c - T_0}{T_{c0} - T_0};\ h = \frac{h_*}{x_*};\ \mathrm{Bi} = \frac{\alpha x_*}{\lambda};\ \chi = \frac{a_\Pi}{a};\ \Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_\Pi},$$

где t – время; x – пространственная переменная; x_* – выбранная единица масштаба; a – температуропроводность; индекс «п» относится к покрытию, индекс «0» – к начальным значениям величин.

В используемых обозначениях и предположении идеальности теплового контакта в анализируемой двуслойной системе (предположение 2) исходная (базовая) математическая модель процесса формирования температурного поля может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2},\ \xi>0,\ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \chi\frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2},\ -h<\xi<0,\ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\theta(\xi,0) = 0;$$

$$\theta(0-0,\mathrm{Fo}) = \theta(0+0,\mathrm{Fo});$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0-0} = \Lambda\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0+0};$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=-h+0} = \Lambda \mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})[\left.\theta(\xi,\mathrm{Fo})\right|_{\xi=-h+0} - \zeta(\mathrm{Fo})];$$

$$\left.\theta(\xi,\mathrm{Fo})\right|_{\mathrm{Fo}\ge 0} \in L^2[-h,+\infty),$$

где последнее условие означает, что при каждом фиксированном значении $\mathrm{Fo} \geqslant 0$ функция $\theta(\xi,\mathrm{Fo})$ интегрируема с квадратом по пространственной переменной $\zeta \in [-h, +\infty)$. Функции $\mathrm{Bi(Fo)}$ и $\zeta(\mathrm{Fo})$ по смыслу решаемой задачи могут принимать лишь неотрицательные значения и должны удовлетворять условиям Гельдера [15].

Рассматриваемая математическая модель представляет собой смешанную задачу для системы двух уравнений в частных производных второго порядка параболического типа.

Для достижения основной цели исследований воспользуемся допущением 4, т.е. реализуем идею «уточненная модель сосредоточенной емкости» [7]. С учетом введенных обозначений «механизм» теплообмена в двуслойной системе определяется как

$$\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0+0} = \mu[\theta(\xi,\mathrm{Fo})|_{\xi=0+0} - \langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle];$$

$$\langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle = \frac{1}{h}\int_{-h}^{0}\theta(\xi,\mathrm{Fo})\,d\xi.$$

Умножив левую и правую части второго уравнения исходной системы на h^{-1} с последующим интегрированием по пространственной переменной ξ в пределах от $-h$ до нуля, воспользовавшись условиями сопряжения при $\xi = 0$, краевым условием при $\xi = -h$ и представленными выше равенствами, трансформируем базовую математическую модель в вид:

$$\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2},\ \xi>0,\ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\frac{\partial\langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle}{\partial\mathrm{Fo}} = \varepsilon^{-1}\left\{\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} - \mathrm{Bi(Fo)}[\theta(\xi,\mathrm{Fo})|_{\xi=0} - \zeta(\mathrm{Fo})]\right\};$$

$$\theta(\xi,0) = 0 = \langle\theta(0)\rangle;$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = \mu[\theta(\xi,\mathrm{Fo})|_{\xi=0} - \langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle];$$

$$\theta(\xi,\mathrm{Fo})|_{\mathrm{Fo}\geq 0} \in L^2[0,+\infty),$$

где $\varepsilon = h(\Lambda\chi)^{-1}$ – определяющий параметр рассматриваемой модели. По смыслу решаемой задачи параметр ε может принимать только положительные значения и зависит и от толщины покрытия, и от симплекса подобия физических свойств материалов двуслойной системы.

По сложившейся терминологии [7, 14] данный упрощенный аналог базовой модели принято называть «уточненной моделью сосредоточенной емкости».

С учетом очевидных равенств

$$\langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle = \left.\left\{\theta(\xi,\mathrm{Fo}) - \mu^{-1}\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right\}\right|_{\xi=0};$$

$$\frac{d\langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle}{d\mathrm{Fo}} = \left.\left\{\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} - \mu^{-1}\frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}\,\partial\xi}\right\}\right|_{\varepsilon=0}$$

допустимо эквивалентное представление рассматриваемой математической модели, более удобное для ее практической реализации:

$$\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2},\ \xi>0,\ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\theta(\xi,0) = 0;$$

$$[1+\mu^{-1}\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})]\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = \mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})[\theta(\xi,\mathrm{Fo})|_{\xi=0} - \zeta(\mathrm{Fo})] + \varepsilon\left[\left.\frac{\partial\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\xi=0} - \mu^{-1}\left.\frac{\partial^2\theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}\,\partial\xi}\right|_{\xi=0}\right]; \quad (1)$$

$$\theta(\xi,\mathrm{Fo})|_{\mathrm{Fo}\geq 0} \in L^2[0,+\infty).$$

Практическое использование математической модели (1) приводит к необходимости решения задачи идентификации параметра μ. Относительно значения этого параметра можно высказать различные соображения. Например, его выбор можно проводить из решения задачи минимаксной минимизации:

- задачи нахождения минимума максимального отклонения температуры контактной границы $\xi = 0$ двуслойного полупространства, определяемой математической моделью (1), от ее истинного значения, определяемого базовой моделью [14];
- задачи нахождения минимума максимального отклонения интегральной величины тепловых потерь в покрытии, определяемой математической моделью (1), от ее истинного значения, определяемого базовой моделью [16].

При $\mu = +\infty$ математическая модель (1) формально трансформируется в модель «сосредоточенная емкость» [14], базирующуюся на предположении, что температура на границах покрытия равна не только его среднеинтегральной температуре, но и температуре контактной границы системы «полупространство—покрытие». Наличие такого (термически тонкого) покрытия в модели фактически учитывается краевым условием при $\xi = 0$, явно содержащим производную безразмерной температуры по переменной Fo.

ПОСТАНОВКА АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Реализуем в задаче (1) автомодельную постановку [10]

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}. \quad (2)$$

Тогда с учетом очевидных равенств

$$\frac{\partial}{\partial\mathrm{Fo}} = -\frac{\eta}{2\mathrm{Fo}}\frac{d}{d\eta}, \quad \frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\frac{d}{d\eta}; \quad \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} = \frac{1}{\mathrm{Fo}}\frac{d^2}{d\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{Fo}\,\partial\xi} = -\frac{1}{2\mathrm{Fo}\sqrt{\mathrm{Fo}}}\left[\frac{d}{d\eta} + \eta\frac{d^2}{d\eta^2}\right]$$

и введенных обозначений

$$U(\eta) \triangleq \theta(\xi,\mathrm{Fo});$$

$$\gamma(\mathrm{Fo}) \triangleq \frac{2\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})\mathrm{Fo}\sqrt{\mathrm{Fo}}}{2\mathrm{Fo}+\mu^{-1}[2\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})\mathrm{Fo}-\varepsilon]},$$

смешанная задача (1) будет эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\frac{d^2U(\eta)}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2}\frac{dU(\eta)}{d\eta} = 0, \quad \eta>0;$$

$$\left.\frac{dU(\eta)}{d\eta}\right|_{\eta=0} = \gamma(\mathrm{Fo})[U(\eta)|_{\eta=0} - \zeta(\mathrm{Fo})], \quad (3)$$

$$U(\eta) \in L^2_\eta[0,+\infty).$$

Заметим, что начальное условие при Fo = 0 в смешанной задаче (1) в автомодельных переменных (2) будет иметь вид краевого условия задачи (3), заданного при $\eta = +\infty$.

Непосредственный анализ краевой задачи (3) показывает, что используемая подстановка (2) приводит к автомодельному решению при выполнении условий:

$$\begin{aligned} \gamma(\mathrm{Fo}) &\equiv \gamma_0 - \mathrm{const}; \\ \zeta(\mathrm{Fo}) &\equiv \zeta_0 - \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{4}$$

где γ_0 ζ_0 – положительные постоянные. Искомое автомодельное решение в этом случае будет обладать тем свойством, что со временем изменяется только масштаб переменной $\eta \geqslant 0$, в то время как масштаб искомой функции $U(\eta)$ остается неизменным.

Решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в (3) имеет вид [10]

$$U(\eta) = U(0) + U'(0)\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\eta/2), \;\; \eta \geq 0, \tag{5}$$

где erf(•) – функция ошибок Гаусса [2].

Используя равенство (5), с учетом условий автомодельности (4), краевого условия при $\eta = 0$ и условия принадлежности функции $U(\eta)$ классу интегрируемых с квадратом функций в (3) находим безразмерную температуру $U(0) \triangleq \theta(0,\mathrm{Fo})$ границы изотропного полупространства в изучаемом автомодельном процессе теплопереноса:

$$U(0) = \zeta_0 \frac{\gamma_0\sqrt{\pi}}{1+\gamma_0\sqrt{\pi}}. \tag{6}$$

АНАЛИЗ АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для получения содержательной информации о свойствах изучаемого процесса теплопереноса обратимся к первому из условий автомодельности в (4) реализуемого граничного режима, преобразуя его к виду

$$\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}) = \gamma_0 \frac{2\mathrm{Fo} - \varepsilon\mu^{-1}}{2\mathrm{Fo}\left(\sqrt{\mathrm{Fo}} - \gamma_0\mu^{-1}\right)}.. \tag{7}$$

При этом при каждом фиксированном значении $\mathrm{Fo} \geqslant 0$ функция Bi(Fo) может принимать лишь неотрицательные значения, поэтому должны выполняться условия

$$\begin{aligned} &\mathrm{Fo} \geq 0.5\varepsilon\mu^{-1}; \\ &\sqrt{\mathrm{Fo}} \geq \gamma_0\mu^{-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Условия (8) можно рассматривать как достаточные условия автомодельности реализуемого граничного режима. Заметим, что при наличии идеального теплового контакта в анализируемой системе ($\mu = +\infty$) условия автомодельности (8) формально можно записать как $\underline{\mathrm{Fo}} \geqslant 0$, а закон теплообмена Bi(Fo), определенный равенством (7), представить в виде $\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}) = \gamma_0 \,/\, \sqrt{\mathrm{Fo}}$. Фактически это означает, что при $\mu = +\infty$ реализуемая математическая модель – модель «сосредоточенная емкость» – не позволяет теоретически оценить влияние пленочного покрытия (параметра μ) на изучаемый (автомодельный) процесс теплопереноса.

Функция Bi(Fo) монотонно убывающая (рис. 1; $\gamma_0 = 1$), причем $\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}^*) = +\infty$, где $\mathrm{Fo}^* = (\gamma_0\mu^{-1})^2$, и справедлива асимптотическая оценка при больших значениях числа Фурье:

$$\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}) \sim \frac{\gamma_0}{\sqrt{\mathrm{Fo}}} \underset{\mathrm{Fo}\to+\infty}{\Rightarrow} 0.$$

Начальный момент времени реализации граничного режима определяется первым из условий автомодельности в (8) и имеет вид $\mathrm{Fo}^{(\varepsilon)} = 0.5\varepsilon\mu^{-1}$, что можно ассоциировать с неидеальностью теплового контакта в системе. При $\mathrm{Fo} \geqslant \mathrm{Fo}^{(\varepsilon)}$, согласно равенству (6), безразмерная температура $U(0) \triangleq \theta(0,\mathrm{Fo}) - \mathrm{const}$, т.е. реализуется режим термостатирования границы изотропного полупространства. При $\mathrm{Fo} < \mathrm{Fo}^{(\varepsilon)}$ отвод теплоты в «холодное» полупространство за счет теплопроводности отсутствует.

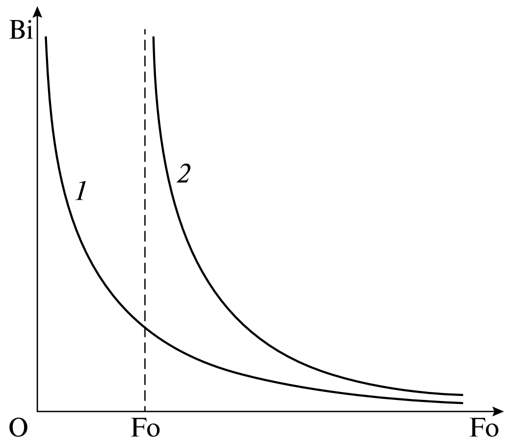

Рис. 1. График функции Bi(Fo) при $\varepsilon = 0$ и различных значениях параметра μ: 1 – $\mu = +\infty$; 2 – $\mu < +\infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты теоретически обосновывают возможность термостатирования контактной границы изотропного полупространства с пленочным покрытием при реализации граничного режима, условия автомодельности которого определены неравенствами (8), и иллюстрируют физические свойства изучаемого процесса теплопереноса при неидеальности теплового контакта в системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
2. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1978. 478 с.
3. *Волосевич П. П., Леванов Е. И.* Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: МФТИ, 1997. 240 с.
4. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
6. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 552 с.
7. *Пудовкин М. А., Волков И. К.* Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.
8. *Карташов Э. М., Кудинов В. А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. 653 с.
9. *Формалев В. Ф.* Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.
10. *Аттетков А. В., Волков И. К.* О возможности реализации режима термостатирования границы сферического очага разогрева // Изв. РАН. Энергетика. 2016. № 3. С. 140–147.
11. *Аттетков А. В., Волков И. К., Гайдаенко К. А.* Автомодельное решение задачи теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, подвижная граница которого обладает пленочным покрытием // Тепловые процессы в технике. 2017. Т. 9. № 4. С. 178–183.
12. *Аттетков А. В., Волков И. К.* Автомодельное решение задачи теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, обладающим термически тонким покрытием // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 7. С. 297–300.
13. *Аттетков А. В., Власов П. А., Волков И. К.* Автомодельное решение задачи теплопроводности в изотропном полупространстве, подвижная граница которого имеет пленочное покрытие // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Машиностроение. 2017. № 5. С. 89–97.

14. *Власов П.А.* Математическое моделирование температурного поля в полупространстве с теплозащитным покрытием // Труды XII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева. М., 2001. Т. 2. С. 166–169.

15. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

16. *Аттетков А.В., Волков И.К., Тверская Е.С.* Математическое моделирование процесса теплопереноса в экранированной стенке при осесимметричном тепловом воздействии // Изв. РАН. Энергетика. 2003. № 5. С. 75–88.

Realizability of the Mode of Temperature Control of the Boundary of an Isotropic Half-Space with a Film Coating

A.V. Attetkov*, P.A. Vlasov, I.K. Volkov, A.V. Kotovich**

Bauman Moscow State Technical University (National research university), Moscow, Russia

**e-mail: fn2@bmstu.ru*

***e-mail: shurik.kot@gmail.com*

We stated the problem of determining the temperature field of an isotropic half-space with a film-coated surface while undergoing heat exchange with the environment. A non-steady-state heat exchange mode with time-varying heat transfer coefficient and ambient temperature is researched. We identified sufficient conditions, the fulfillment of which makes it possible to implement a self-similar heat exchange process in the analyzed system. The physical properties of the studied self-similar process are qualitatively investigated and we established its specific features. The possibility of realizing the mode of temperature control of the boundary of an isotropic half-space with a film coating is theoretically substantiated in case of non-steady-state heat exchange with the environment.

Keywords: isotropic half-space, film coating, non-steady-state heat exchange, temperature field, self-similar process