

УДК 621.039

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВНУТРИ ЖИДКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ПОЛЕ ВНЕШНЕГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

© 2024 г. О. О. Корчагина*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия

*e-mail: ok@ibrae.ac.ru

Поступила в редакцию 18.07.2023 г.

После доработки 04.06.2024 г.

Принята к публикации 07.06.2024 г.

Работа посвящена аналитической зависимости градиента температуры внутри жидкого включения в монокристалле галита от градиента внешнего температурного поля. Соответствующая формула была получена для включений эллипсоидальной формы. Согласно полученному выражению, градиент температуры внутри включения зависит от соотношения сторон (осей) включения, коэффициентов теплопроводности включения и среды, а также внешнего градиента температуры. Между собой сравнивались результаты, полученные по формуле, с ранее известными результатами и с результатами численного расчета уравнения теплопроводности в трехмерной постановке для различных значений соотношения осей включения. Показано лучшее совпадение результатов расчетов по полученной зависимости с результатами численного решения уравнения теплопроводности. Хорошее совпадение результатов численных и аналитических расчетов позволяет использовать полученное аналитическое выражение для градиента температуры во включении эллипсоидальной формы с целью дальнейшего построения теории термомиграции жидких включений.

Ключевые слова: радиоактивные отходы, жидкое включение, поле температуры, эллипсоид, соотношение осей, теплопроводность

DOI: 10.31857/S0002331024010057

ВВЕДЕНИЕ

Изучение эволюции жидких включений в поле градиента температуры имеет важное значение для обоснования долгосрочной безопасной изоляции радиоактивных отходов в геологической породе галитов.

Задача о распределении температуры внутри жидкого включения представляет большой интерес для описания движения этих включений в неоднородно нагретых кристаллах соли. Движение включений в таких кристаллах обусловлено потоком массы через раствор от более нагретой к более холодной стенке, что, в свою очередь, является следствием роста растворимости соли в воде с температурой. В результате включение движется в сторону больших температур.

РАСЧЕТ ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

Важной характеристикой, определяющей скорость миграции включения, является градиент температуры внутри включения (больше градиент — выше скорость миграции включения). Так, в работе [1] утверждается, что если значения теплопроводности в кристалле соли и в растворе внутри включения различаются значительно, то градиент внутри включения растет монотонно с ростом аспектного отношения b/a :

$$\nabla T_i \sim b / a \nabla T_e, \quad (1)$$

где a — размер включения в направлении, перпендикулярном градиенту температуры, а b — размер вдоль градиента. В работе [3] для описания движения включений в кристаллах KCl была предложена следующая формула, связывающая градиент температуры в объеме включения ∇T_i и средний градиент температуры в матрице ∇T_e :

$$\nabla T_i \simeq \left(1 + \varphi \frac{b}{a}\right) \nabla T_e, \quad (2)$$

где φ — константа, зависящая от вещества кристалла и включения, выбранная для системы $KCl-H_2O$ равной $\varphi \approx 1/2$.

Согласно [3], градиент температуры во включении не может быть постоянным и в формуле (2) в качестве ∇T_i подразумевается градиент в самом центре включения (максимальное значение градиента в объеме), поэтому далее авторами [3] была введена поправка, основанная на том, что градиент в объеме принимает промежуточное значение между ∇T_i и ∇T_e :

$$\nabla T_{iv} \simeq \left(1 + \varphi \frac{b}{2a}\right) \nabla T_e. \quad (3)$$

В работе [4] подробно рассматривается теория и механизм миграции жидких включений в соли под действием градиента температуры. Для нахождения скорости миграции включений необходимо знать градиент температуры в объеме включения. Так как теплопроводность в рассоле меньше, чем в матрице, градиент температуры внутри включения будет выше. Максимальный градиент температуры находится в центре включения:

$$\nabla T_i = \xi \nabla T_e, \quad (4)$$

где ξ — поправочный коэффициент, зависящий от среды вблизи включения:

$$\xi = \frac{3}{2 + \frac{\kappa_i}{\kappa_e}},$$

где κ_i , κ_e — коэффициенты теплопроводности внутри включения и снаружи соответственно.

Для плоского включения с большим соотношением сторон:

$$\xi = \frac{\kappa_e}{\kappa_i}.$$

В формуле (4) учитывается зависимость градиента температуры в объеме включения от теплофизических свойств среды, но не учитывается зависимость от размеров включения: при заданных теплофизических свойствах исследуемой области форма и размер включений не влияет на градиент температуры.

Таким образом, в приведенных приближенных формулах предпринята попытка учесть различные факторы, влияющие на определение градиента температуры во включении. С учетом важности данного параметра для построения общей модели миграции ансамбля включений, в настоящей работе предлагается вывод общей формулы, устраняющей ограничения формул (1)–(4).

Рассматривается жидкое включение в форме эллипсоида (рис. 1) с осями $a < b = c$, где a направлена вдоль OX , b вдоль OY , а c , соответственно, вдоль OZ . Эллипсоид помещен в однородное внешнее температурное поле с постоянным градиентом ∇T_0 , направленным вдоль оси OX . Считается, что скорость термомиграции постоянна. Оценки влияния скорости термомиграции на теплоперенос вне жидкого включения показывают его незначительность из-за малых значений скорости термомиграции.

Учитывая отсутствие конвекционного переноса тепла внутри включения (число Рэлея $Ra \sim 10^{-4}$), в системе координат, связанной с центром масс включения (рис. 1), уравнение теплопроводности запишем в виде:

$$\operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) = 0, \quad (5)$$

где $\kappa = \kappa_i$ внутри включения и $\kappa = \kappa_e$ вне его.

Решение уравнения (5) для градиента температуры внутри включения получено с использованием подходов изложенных в [5] и [6].

$$\nabla T_i = \frac{\nabla T_{0x}}{1 + \left(\frac{\kappa_i}{\kappa_e} - 1\right) n_x}, \quad (6)$$

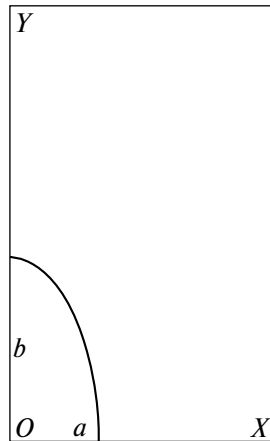


Рис. 1. Сечение $\frac{1}{4}$ эллипсоида в плоскости OZ .

где $n_x = \frac{1 + exc^2}{exc^3} (exc - \arctg exc)$, $exc = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}$, $(a < b = c)$.

Полагая, что $b \gg a$, получим $exc = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \rightarrow \frac{b}{a}$, $\arctg exc \rightarrow \frac{\pi}{2}$, тогда

$$n_x = \frac{1 + \frac{b^2}{a^2}}{\frac{b^3}{a^3}} \left(\frac{b}{a} - \frac{\pi}{2} \right) \approx 1 - \frac{a\pi}{2b}. \quad (7)$$

Далее с учетом (7) решение (6) примет вид:

$$\nabla T_i \approx \frac{\nabla T_0}{1 + \left(\frac{\kappa_i}{\kappa_e} - 1 \right) n_x} = \frac{\kappa_e \nabla T_0}{\kappa_e (1 - n_x) + \kappa_i n_x}. \quad (8)$$

Учитывая, что для галитов и рассола $\kappa_e \approx 7$, $\kappa_i \approx 0,6$ Вт/мК, $b/a \approx 3 \div 10$, из формулы (8) получим:

$$\nabla T_i \approx \nabla T_0 \frac{\kappa_e}{\kappa_e \frac{\pi a}{2b} + \kappa_i}. \quad (9)$$

Для сравнения результатов, полученных по формулам (1), (2), (9), с численным решением уравнения (5) были выполнены расчеты, которые проводились методом установления. Решалась нестационарная задача теплопроводности с заданными начальными и граничными условиями в трехмерной постановке:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\kappa \text{grad} T), \quad \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2, \Gamma_4} = \nabla T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1, \Gamma_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_5, \Gamma_6} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{t=0} = \nabla T_0, \quad (10)$$

где Γ_2, Γ_4 — границы расчетной области перпендикулярные оси OX , а Γ_1, Γ_3 и Γ_5, Γ_6 — перпендикулярные OY, OZ соответственно.

Расчетная область представляет собой прямоугольный параллелепипед (среда), внутри которого находится эллипсоид (жидкое включение). Задача решалась с помощью метода конечных разностей. Также для экономии времени расчета использовались свойства симметрии задачи относительно осей OY и OZ и антисимметрией относительно OX , внешний градиент температуры направлен вдоль OX , средний градиент температуры внутри включения вычисляется при $y = z = 0$, x пробегает значения в пределах области, где значение коэффициента теплопроводности соответствует включению, т.е. от центральной точки включения до его правой границы.

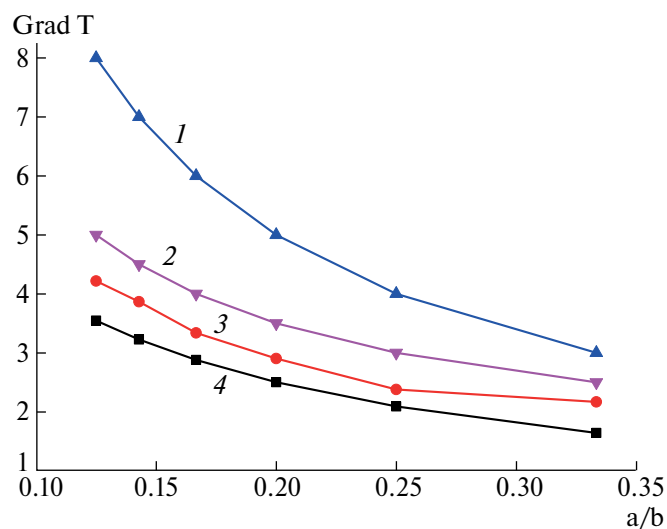


Рис. 2. Зависимости градиента температуры внутри включения от соотношения сторон для формул (1), (2), (9) и численного расчета (кривые 1, 2, 4 и 3 соответственно).

Расчеты были проведены для включений с разным соотношением сторон $b/a \approx 3 \div 10$ (a фиксируется, b варьируется).

На рис. 2. представлены результаты расчетов согласно формулам (1), (2), (9) и численный расчет. Вычисления проводились для включений эллипсоидальной формы с разным соотношением осей. Кривая 1 представляет результаты формулы (1), 2 – формулы (2), 4 – формулы (9), кривая 3 отображает численный расчет. Результаты, полученные с помощью аналитической формулы (9), лучше всего соответствуют численному расчету.

Также полученные результаты показывают, что вытянутые в изотермическом направлении включения имеют более высокий градиент температуры внутри, чем включения формой, ближе к квадратной. Значения градиента температуры, полученные по формуле (4), где градиент температуры внутри включения не зависит от соотношения сторон, на рис. 2. не представлены, т.к. они существенно далеки от приведенных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была получена простая аналитическая зависимость (9) температурного градиента внутри жидкого включения в монокристалле галита от известного градиента температуры вне его.

Полученная формула (9) (черная кривая на рис. 2) учитывает теплофизические и геометрические свойства включений в отличие от ранее полученных.

Хорошее совпадение результатов численных и аналитических расчетов позволяет использовать полученное выражение (9) для дальнейшего построения теории термомиграции жидких включений в соляных формациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anthony T. R. and Cline H. E. Thermal Migration of Liquid Droplets through Solids. Journal of Applied Physics 1971. V. 42. P. 3380–3387.
2. Аветисян А. Р., Корчагина О. О., Матвеев Л. В. Кинетическая модель эволюции жидких включений в соляных породах при высоких градиентах температуры // Радиоактивные отходы. 2022. № 18. С. 86–90.
3. Гегузин Я. Е., Дзюба А. С., Кружанов В. С. Исследование поведения жидких включений в кристалле в поле температурного градиента // Кристаллография. 1975. Т. 20. Вып. 2. С. 383–390.
4. Thomas H. Pigford, Migration of Brine Inclusions in Salt. Nuclear Technology. 1982. V. 56. № 1. P. 93–101.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика VIII том. Электродинамика сплошных сред.
6. Carslaw H. R., Jaeger J. C. Conduction of Heat in Solids. 1959. Oxford university press.

Temperature Distribution Inside the Liquid Inclusion in the Field of the External Temperature Gradient

O. O. Korchagina*

Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**e-mail: ok@ibrae.ac.ru*

The paper is devoted to the analytical dependence of the temperature gradient inside a liquid inclusion in a single crystal of halite on the gradient of the external temperature field. The corresponding formula was obtained for ellipsoidal inclusions. According to this expression, the temperature gradient inside the inclusion depends on the ratio of the sides (axes) of the inclusion, the thermal conductivity coefficients of the inclusion and the medium, as well as the external temperature gradient. The results obtained by the formula were compared with the previously known results and with the results of numerical calculation of the thermal conductivity equation in a three-dimensional formulation for different values of the ratio of the inclusion axes. The best accordance of the calculation results according to the obtained dependence with the results of the numerical solution of the heat equation is shown. A good coincidence of the results of numerical and analytical calculations allows us to use the obtained analytical expression for the temperature gradient in the inclusion of an ellipsoidal shape in order to further construct the theory of thermomigration of liquid inclusions.

Keywords: radioactive waste, liquid inclusion, temperature field, ellipsoid, axis ratio, thermal conductivity