

УДК 621.3.011.32

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ МЕЖДУ СООСНЫМИ  
ВИТКАМИ С ТОКОМ РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ© 2023 г. Г. Н. Цицикян<sup>1</sup>, \*, М. Ю. Антипов<sup>1</sup>, \*\*<sup>1</sup>Филиал “ЦНИИ СЭТ” ФГУП “Крыловский государственный научный центр”,  
Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: G\_Tsitsikyan@ksrc.ru

\*\*e-mail: posich@mail.ru

Поступила в редакцию 01.04.2022 г.

После доработки 12.08.2022 г.

Принята к публикации 15.08.2022 г.

Поставленная задача, вынесенная в заголовок и продиктованная различными практическими приложениями, базируется на известных рекомендациях по расчету коэффициентов взаимной индукции, включая методы расчета, использующие специальные функции, такие как полные эллиптические интегралы первого и второго рода, а также сферические функции Лежандра второго рода с полуцелым индексом [1–5]. К числу практических приложений могут быть отнесены оценки взаимных индуктивностей в системах бесконтактных зарядных устройств и электродинамических взаимодействий в обмотках трансформаторов, индукторов, в нагрузочных устройствах соленоидального исполнения, в обмотках приводных устройств и т.д. Этим вопросам посвящено большое число публикаций и руководств. Примером могут служить работы [6–9].

**Ключевые слова:** соосные витки различной конфигурации, электродинамические силы, коэффициенты взаимной индукции

DOI: 10.31857/S0002331022060048, EDN: ВПНАС

В статье рассмотрены расчетные рекомендации для сил взаимодействия между соленоидом и соосным витком в двух модификациях: с использованием полных эллиптических интегралов первого и второго рода и функции Лежандра второго рода с полуцелым индексом. Вместе с тем выражение для силы взаимодействия двух соосных круговых контуров радиусов  $R_1$  и  $R_2$  с токами  $i_1$  и  $i_2$ , данные в [5] и перезаписанные в виде

$$f_z = \mu_0 i_1 i_2 \frac{z}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{Q_{1/2}^1(g)}{(g^2 - 1)^{1/2}}, \quad (1)$$

где  $g = \frac{z^2 + R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2}$ , с расстоянием  $z$  между параллельными плоскостями расположения контуров, и в варианте (П2.-3) в [5] в виде:

$$f_z = \mu_0 i_1 i_2 \frac{z}{[z^2 + (R_1 + R_2)^2]^{1/2}} \left[ K(k) - \frac{z^2 + R_1^2 + R_2^2}{z^2 + (R_1 - R_2)^2} E(k) \right], \quad (2)$$

дают основание утверждать, что присоединенная функция Лежандра второго рода с полуцелым индексом  $Q_{1/2}^1(g)$  с  $g = \frac{2-k^2}{k^2}$  и с  $k^2 = \frac{4R_1R_2}{z^2 + (R_1 + R_2)^2}$ , равна

$$Q_{1/2}^1(g) = \frac{(1-k^2)^{1/2}}{k} K(k) - \frac{2-k^2}{2k(1-k^2)^{1/2}} E(k), \quad (3)$$

что и было продемонстрировано в [5].

Для случая, когда  $R_1 = R_2 = R$  и  $z = R$ ,  $g = 1.5$  и  $k^2 = 0.8$ , имеем

$$f_z = \mu_0 i_1 i_2 \frac{Q_{1/2}^1(1.5)}{(2.25-1)^{1/2}} \cong -\mu_0 i_1 i_2 \frac{0.639}{1.118} = -\mu_0 i_1 i_2 \times 0.5716.$$

Численное значение для  $Q_{1/2}^1(1.5) \cong -0.639$  можно проверить по формуле (3), подставляя  $k^2 = 0.8$ , и тогда, определяя  $K$  и  $E$  для этого значения, будем иметь:

$$Q_{1/2}^1(1.5) = \frac{0.4472}{0.8944} 2.2572 - \frac{1.2}{2\sqrt{0.8}\sqrt{0.2}} 1.1785 = -0.6392.$$

Выражение (3) проверялось численно на примере, когда в одном из вариантов  $k^2 = 0.25$ , ( $k = 0.5$ ). В этом случае  $g = 7.0$  и  $Q_{1/2}^1(7) = -0.0455$ . Для правой стороны (3) независимое вычисление через полные эллиптические интегралы дает такое же численное значение.

В работе [5] формула (11) было записано выражение для коэффициента взаимной индукции двух круговых соосных контуров с принятыми там обозначениями в виде:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0}{2} [(R_1 + R_2)^2 + x^2]^{1/2} [2(K - E) - k^2 K] = \mu_0 (R_1 R_2)^{1/2} \left[ \left( \frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \right] = \\ &= \mu_0 \frac{(R_1 R_2)^{1/2}}{k} [(2 - k^2) K - 2E], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $x$  — расстояние между плоскостями расположения контуров с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , и тогда

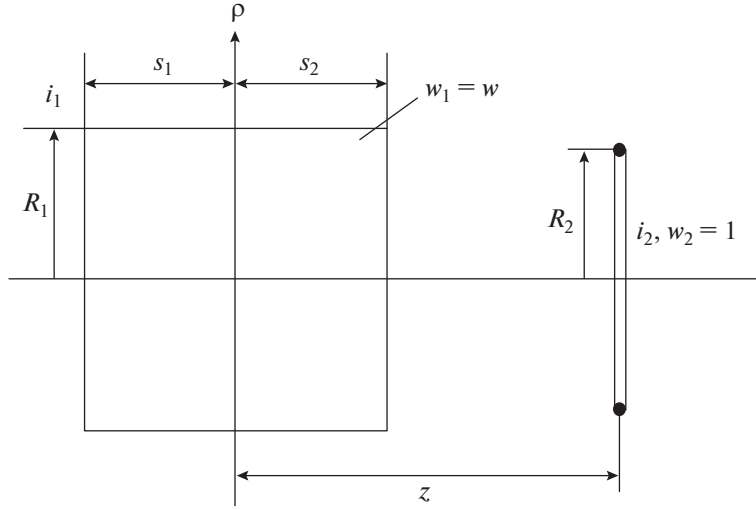
$k^2 = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2 + x^2}$ . Вместе с тем в формуле (2) в [5] выражение для  $k^2$  записано с

опечаткой как  $k^2 = \frac{4R_1R^2}{(R_1 + R_2)^2 + x^2}$ .

Далее произведем сопоставление выражений для сил взаимодействия между соосными соленоидами длиной  $2s_1$  и радиусом  $R_1$  с круговым витком  $R_2$ , принимая за основу рис. 1 в [6] при  $a = 0$  и  $s_2 \rightarrow 0$ , который здесь воспроизведен также на рис. 1.

Выражение для силы взаимодействия между соленоидом и витком с токами  $i_1$  и  $i_2$  по оси  $z$  (рис. 1) известно и представлено формулой (29) в [6], которая при  $a = 0$  и  $s_1 = s$  может быть записана в виде:

$$f = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 w}{(2s/R_1)} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^{1/2} [Q_{1/2}(g_1) - Q_{1/2}(g_2)], \quad (6)$$



**Рис. 1.** Соленоид с током  $i_1$ , с числом витков  $w_1 = w$  и длиной  $2s_1$ , и соосный круговой виток с током  $i_2$  радиуса  $R_2$ , отстоящий от оси  $\rho$  на расстояние  $z$ .

где

$$g_{1,2} = 1 + \frac{(z \mp s)^2 + (R_2 - R_1)^2}{2R_1 R_2} = \frac{(z \mp s)^2 + R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2}. \quad (7)$$

Здесь  $Q_{1/2}(g_{1,2})$  – функции Лежандра второго рода, которые могут быть представлены через полные эллиптические интегралы первого и второго рода в виде [1]:

$$Q_{1/2}(g_{1,2}) = g_{1,2} \frac{2^{1/2}}{(g_{1,2} + 1)^{1/2}} K \left( \left( \frac{2}{g_{1,2} + 1} \right)^{1/2} \right) - 2^{1/2} (g_{1,2} + 1)^{1/2} E \left( \left( \frac{2}{g_{1,2} + 1} \right)^{1/2} \right). \quad (8)$$

Учитывая, что [5]

$$k_{1,2}^2 = \frac{2}{g_{1,2} + 1} = \frac{4R_1 R_2}{(z \mp s)^2 + (R_1 + R_2)^2}, \quad (9)$$

подстановкой (9) в (8) и далее в (6) в результате получим:

$$f = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 w}{2s} (R_1 R_2)^{1/2} \left\{ \frac{(z - s)^2 + R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2} k_1 K(k_1) - \left( \frac{(z - s)^2 + (R_1 + R_2)^2}{2R_1 R_2} \right)^{1/2} E(k_1) - \right. \\ \left. - \frac{(z + s)^2 + R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2} k_2 K(k_2) + \left( \frac{(z + s)^2 + (R_1 + R_2)^2}{2R_1 R_2} \right)^{1/2} E(k_2) \right\}. \quad (10)$$

Результат (10) можно переписать в следующем виде:

$$f = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 w}{2s} (R_1 R_2)^{1/2} \left\{ \left( \frac{2}{k_1^2} - 1 \right) k_1 K(k_1) - \frac{2}{k_1} E(k_1) - \left( \frac{2}{k_2^2} - 1 \right) k_2 K(k_2) + \frac{2}{k_2} E(k_2) \right\}. \quad (11)$$

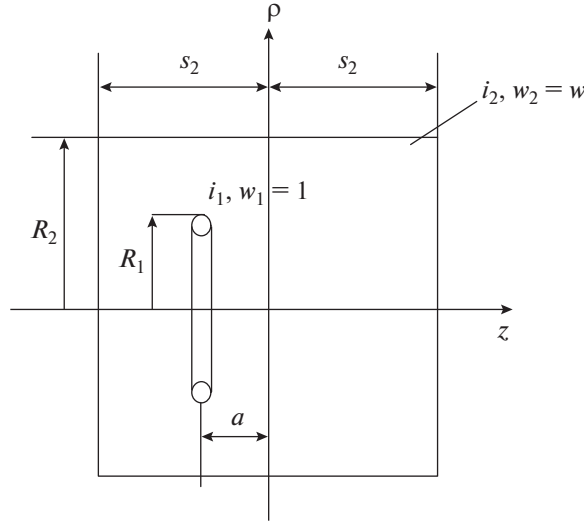


Рис. 2. Виток радиуса  $R_1$  внутри коаксиального соленоида радиуса  $R_2$ .

Полагая в формуле (6)  $R_2 = 0.5R_1$  и  $s = R_1$ , найдем по формуле (6) при  $z = s$ , с учетом табличных значений [7] для  $Q_{1/2}$ :

$$f_z = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 w}{2} (0.5)^{1/2} [Q_{1/2}(1.25) - Q_{1/2}(5.25)] = -\mu_0 i_1 i_2 w \frac{0.707}{2} (0.6266 - 0.047) = -\mu_0 i_1 i_2 w \cdot 0.2049.$$

Полагая в (9)  $k_1^2 = 0.888$  и  $k_2^2 = 0.32$  и осуществляя вычисления по формуле (11) с учетом таблиц для  $K$  и  $E$  от  $k^2$ , найдем:

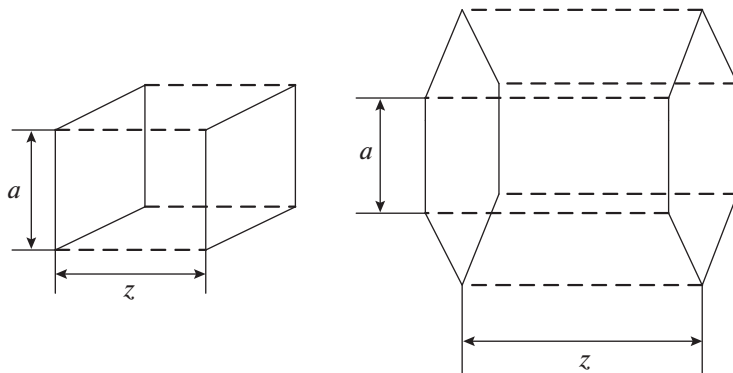
$$f = -\mu_0 i_1 i_2 w \frac{(0.5)^{1/2}}{2} \left[ \left( \frac{2}{0.888} - 1 \right) 0.888^{1/2} K(0.888) - \frac{2}{0.888^{1/2}} E(0.888) - \left( \frac{2}{0.32} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times 0.32^{1/2} K(0.32) + \frac{2}{(0.32)} E(0.32) \right] = -\mu_0 i_1 i_2 w \cdot 0.2042,$$

т.е. практически то же значение, что и по предыдущему расчету.

При расположении витка внутри соосного соленоида как на рис. 2, можно воспользоваться следующим рядом для силы взаимодействия [6]:

$$f_z = \pi \frac{\mu_0 i_1 i_2 w}{2s_2/R_2} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \left[ \frac{1}{2} (q_{1n}^2 + 1)^{-3/2} + \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \frac{3}{16} \frac{1 - 4q_{1n}^2}{(q_{1n}^2 + 1)^{7/2}} + \right. \\ \left. + \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4 \frac{15}{128} \frac{8q_{1n}^4 - 12q_{1n}^2 + 1}{(q_{1n}^2 + 1)^{11/2}} - \dots \right], \quad (12)$$

где  $q_{11} = (-s_2 + a)/R_2$ ,  $q_{12} = (-s_2 - a)/R_2$ , который при  $a = 0$  обращается в ноль.



**Рис. 3.** Параллельные витки квадратной и шестиугольной формы со сторонами  $a$  и при расстоянии между плоскостями, равным  $z$ .

При расположении витка с противоположной стороны плоскости с  $\rho$  (рис. 2) значение силы следует изменить на противоположное.

Витки, расположенные в параллельных плоскостях и формирующие соленоиды, могут быть и другой формы. Здесь будут рассмотрены витки в форме квадрата ( $n = 4$ ) и шестиугольника ( $n = 6$ ). Оценку силовых взаимодействий между этими витками осуществим, используя выражения для взаимной индуктивности (4.47) и (4.48), приведенные в [2].

При  $n = 4, 6$  и близко расположенных многоугольниках запишем для  $M$  ( $n = 4$ ) и ( $n = 6$ ) выражения (4–47) и (4–48), данные в [2]:

$$M|_{n=4} = \frac{2\mu_0}{\pi} a \left( \ln \frac{a}{z} - 0.7740 + \frac{z}{a} - 0.0429 \frac{z^2}{a^2} - 0.109 \frac{z^4}{a^4} + \dots \right), \quad (13)$$

$$M|_{n=6} = \frac{3\mu_0}{\pi} a \left( \ln \frac{a}{z} - 0.1515 + 0.3954 \frac{z}{a} - 0.1160 \frac{z^2}{a^2} - 0.052 \frac{z^4}{a^4} + \dots \right). \quad (14)$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial M}{\partial z} \Big|_{n=4} \cong \frac{\mu_0}{\pi} \left( -2 \frac{a}{z} + 2 - 0.1716 \frac{z}{a} - 0.872 \frac{z^3}{a^3} + \dots \right), \quad (15)$$

и при  $z = 0.5a$  имеем для (15) —  $\mu_0 0.6986$ .

Действуя аналогично для  $n = 6$ , получим:

$$\frac{\partial M}{\partial z} \Big|_{n=6} \cong \frac{\mu_0}{\pi} \left( -3 \frac{a}{z} + 1.1862 + 0.696 \frac{z}{a} - 0.624 \frac{z^3}{a^3} + \dots \right), \quad (16)$$

и при  $z = 0.5a$  имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial z} \Big|_{n=6} \cong \frac{\mu_0}{\pi} (-6 + 1.1862 + 0.348 - 0.078) = -\mu_0 1.4463. \quad (17)$$

Умножая (15) и (16) на произведение токов  $i_1 i_2$  в витках, найдем и силу взаимодействия для случая  $n = 4$ :

$$f_z|_{n=4} = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial z} \Big|_{n=4} \cong \frac{\mu_0}{\pi} i_1 i_2 \left( 2 - 2 \frac{a}{z} - 0.1716 \frac{z}{a} - 0.872 \frac{z^3}{a^3} \right), \quad (18)$$

и аналогичную формулу для  $n = 6$

$$f_z|_{n=6} \cong \frac{\mu_0}{\pi} i_1 i_2 \left( -3 \frac{a}{z} + 1.1862 + 0.696 \frac{z}{a} - 0.624 \frac{z^3}{a^3} \right). \quad (19)$$

Теперь исходим из предпосылки, что площади, охватываемые квадратными и круговыми витками, равны, т.е., что  $a^2 = \pi R^2$  и  $R = \frac{a}{\sqrt{\pi}} = 0.5642a$ . Тогда при  $z = 0.5a$  значение для силы взаимодействия равно:  $f_z|_{n=4} \cong -\mu_0 i_1 i_2 0.6986$ .

Теперь определяем  $k^2$ :

$$k^2 = \frac{4R^2}{0.25a^2 + 4R^2} = \frac{4R^2}{0.25\pi R^2 + 4R^2} \cong 0.836,$$

и тогда по формуле (2) получим:

$$f_z = \mu_0 i_1 i_2 0.405 [K(0.836) - 3.5466E(0.836)] = -\mu_0 i_1 i_2 0.703.$$

Для выяснения возможности оценки силы взаимодействия через эквивалентный по площади правильный шестиугольник со стороной  $a$  заметим, что площадь, охватываемая таким шестиугольником равна:

$$\sqrt{3}a^2 + 0.866a^2 \cong 2.598a^2.$$

Эквивалентные по площади круговой контур определяется из равенства:

$$\pi R^2 = 2.598a^2, \text{ и тогда } R \cong 0.9094a.$$

Теперь можно сопоставить результаты вычислений по формул (19) и (2), приняв  $z = 0.5a$ . Подставив в формулу (19) принятые условия имеем

$$f_z|_{n=6} \cong \frac{\mu_0}{\pi} i_1 i_2 (-6 + 1.1862 + 0.348 - 0.078) = -\mu_0 i_1 i_2 1.446.$$

Находим теперь  $\frac{z}{R} = \frac{0.5}{0.9094} \cong 0.55$  и  $k^2 = \frac{4R^2}{z^2 + 4R^2} \cong 0.93$ .

Тогда получим в согласии с таблицей из приложения 4 в [2]

$$\begin{aligned} f_z &\cong \mu_0 i_1 i_2 \frac{1}{\left(1 + \frac{4}{0.55^2}\right)^{1/2}} \left[ K(0.93) - \left(1 + \frac{2}{0.55^2}\right) E(0.93) \right] = \\ &= \mu_0 i_1 i_2 \frac{1}{14.223^{1/2}} [2.7471 - 7.6117 \cdot 1.0791] = -\mu_0 i_1 i_2 1.449 \end{aligned}$$

против  $-\mu_0 i_1 i_2 1.446$ , и результаты расчетов практически одинаковы.

Близость значений для силы  $f$  дает основание утверждать, что и при условии равенства площадей, охватываемых квадратными и шестиугольными контурами, электродинамическую силу можно оценивать по формулам (18) и (19), не прибегая к нахождению полных эллиптических интегралов первого и второго рода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определение электродинамических сил между соосными витками с токами можно производить по выражениям, представленным в данной статье формулами (1), (2), для силы между соленоидом и соосным витком — по формулам (6), (11) и (12), а для квадратных и шестиугольных контуров — по формулам (18) и (19) при условии, что  $0 < \frac{z}{a} \leq 0.5$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и Н. Стиган. Перевод на русский язык. Москва “Наука”. ГРФМЛ, 1979, 832 стр.
2. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Энергоатомиздат Ленингр. отд. 1986. 488 с.
3. Garrett M.W. Calculation of Fields, forces, and Mutual Inductences of Current Systems by Elliptic Integrals, Journal of Applied Physics, V. 34. № 9. 1963. pp. 2567–2573.
4. Chester Snow Formulas for Computing Capacitance and Inductance. National Bureau of Standards, Circular 544. P. 1954–69.
5. Цицикян Г.Н. О коэффициентах взаимной индукции и силах взаимодействия круговых коаксиальных контуров. Электричество. 2019. № 6. с. 59–65.
6. Цицикян Г.Н. Взаимные индуктивности и силы взаимодействия соосных контуров, соленоидов и катушек. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. № 6. 1985. с. 90–99.
7. Цицикян Г.Н., Бобровников П.В., Антипов М.Ю. Руководство по расчету индуктивности и электродинамических сил в токоведущих частях электротехнических комплексов. Монография. — СПб. ФГУП “Крыловский государственный научный центр” 2020, 118 с.
8. Raju S., Wu R., Chan M., Patrick Yue C. Modeling of mutual coupling between planar inductors in wireless power electronics. V. 20. № 1. January 2014. pp. 481–490.
9. Lee S.-H., Lorenz R.D. Development and Validation of Model for 95%-Efficiency 220-W Wireless Power Transfer Over a 30-cm Air Gap. IEEE Trans. on Industry Applications, V. 47. № 6. Nov/Dec 2011. pp. 1495–2504.

### Determination of Electrodynamic Forces between Coaxial Coil Turns with Current of Various Configuration

G. N. Tsitsikyan<sup>a, \*</sup> and M. Yu. Antipov<sup>a, \*\*</sup>

<sup>a</sup>SET Branch of KSRC, St. Petersburg, Russia

\*e-mail: G\_Tsitsikyan@ksrc.ru

\*\*e-mail: posich@mail.ru

Determination of electrodynamic forces, as may be required for various practical purposes, is based on known calculation recommendations for mutual inductance coefficients, including the calculation methods with special functions, like complete elliptic integrals of the 1st and the 2nd kind, as well as spherical Legendre functions of the 2nd kind with half-integer index [1–5]. Some examples of practical tasks requiring these calculations are the assessments of mutual inductances in non-contact chargers, as well as the assessments of electrodynamic interactions in the windings of transformers, inductors, various solenoid-based loading devices, electric drives, etc. These applications are discussed in numerous publications and guides, e.g. [6–9].

**Keywords:** coaxial turns of various configurations, electrodynamic forces, mutual inductance coefficient