Известия

ISSN 0002-3310

# Российской академии наук

# ЭНЕРГЕТИКА









# СОДЕРЖАНИЕ

| Автоматизация вычислений при проектировании интегрированной энергетической системы на основе ее цифрового двойника  |     |
|---|-----|
| В. А. Стенников, Е. А. Барахтенко, Д. В. Соколов, Г. С. Майоров   | 3   |
| Анализ возможностей энергоснабжения потребителей в условиях похолоданий при крупномасштабных нештатных ситуациях  |     |
| С. М. Сендеров, Н. М. Береснева   | 21  |
| Кластеризация электроэнергетических систем на зоны надежности<br>при оценке балансовой надежности. Часть 2  | 24  |
| Д. С. Крупенев, П. А. Беляев, Д. А. Бояркин   | 54  |
| Исследование вычислительных затрат на расчет радиоактивного выброса<br>при тяжелой аварии на АЭС с ВВЭР в зависимости от используемых<br>физических молелей |     |
| М. Ф. Филиппов, М. И. Делова, К. С. Долганов, А. Е. Киселев,<br>С. Н. Красноперов, В. Н. Семенов  | 45  |
| Дополнительные условия в краевых задачах теплопроводности (обзор)<br>В. А. Кудинов, К. В. Трубицын, Е. В. Котова, Т. Е. Гаврилова, В. К. Ткачев             | 63  |
| Адаптивный алгоритм управления на основе виртуального<br>синхронного генератора. Часть 2  |     |
| А. А. Суворов, А. Б. Аскаров, Н. Ю. Рубан, Ю. Д. Бай  | 93  |
| Технологии комплексного освоения гидрогеотермальных ресурсов<br>северокавказского региона   |     |
| А. Б. Алхасов, Д. А. Алхасова   | 117 |
| Определение коэффициентов разложения нелинейной характеристики<br>в степенной ряд   |     |
| Н. В. Коровкин, С. С. Грицутенко, Д. А. Федотов   | 127 |

# CONTENTS

| Automation of computations in designing an integrated energy system based on its digital twin  |     |
|--|-----|
| V. A. Stennikov, E. A. Barakhtenko, D. V. Sokolov, G. S. Mayorov   | 3   |
| Analysis of the possibilities of energy supply to consumers in cold conditions during large-scale emergency installations in the gas industry <i>S. M. Senderov, N. M. Beresneva</i>   | 21  |
| Clustering of electric power systems into reliability zones in adequacy assessment.<br>Part 2  | 34  |
| D. S. Krupenev, N. A. Delyaev, D. A. Boyarkin  | 54  |
| Analysis of the influence of models of individual physical processes and phenomena<br>on the calculation time of the source term in severe accidents<br>$M_{i}Ph_{i}Philippov_{i}M_{i}L_{i}Delova_{i}K_{i}S_{i}Delgapov_{i}A_{i}F_{i}Kiselav_{i}S_{i}N_{i}Krasponarov_{i}$ |     |
| V. N. Semenov, D. Yu. Tomashchik   | 45  |
| Additional conditions in boundary value problems of heat conduction (review)<br>V. A. Kudinov, K. V. Trubitsyn, E. V. Kotova, T. E. Gavrilova, V. K. Tkachev   | 63  |
| Adaptive control algorithm based on a virtual synchronous generator. Part 2<br>A. A. Suvorov, A. B. Askarov, N. Yu. Ruban, Yu. D. Bay  | 93  |
| Technologies of the integrated development of hydrogeothermal resources of the north caucasian region  |     |
| A. B. Alkhasov, D. A. Alkhasova  | 117 |
| Determination of coefficients of decomposition of a nonlinear characteristic   |     |
| N. V. Korovkin, S. S. Gritsutenko, D. A. Fedotov   | 127 |

УДК 004.942

# АВТОМАТИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ИНТЕГРИРОВАННОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ЕЕ ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА

© 2024 г. В. А. Стенников, Е. А. Барахтенко\*, Д. В. Соколов, Г. С. Майоров

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия \*e-mail: barakhtenko@isem.irk.ru

> Поступила в редакцию 21.11.2023 г. После доработки 17.06.2024 г. Принята к публикации 22.06.2024 г.

Построение интегрированных энергетических систем (ИЭС) на базе традиционных работающих раздельно энергосистем обеспечивает повышение эффективности и надежности энергоснабжения потребителей. При этом ИЭС являются сложными для проектирования системами. Цифровой двойник является инструментом, позволяющим объединить все необходимые для проектирования ИЭС средства в едином информационном пространстве. Программные средства, реализующие цифровой двойник ИЭС, требуют высокой вычислительной гибкости, что обусловлено необходимостью моделирования разнообразного оборудования и привлечения широкого спектра методов и математических моделей. Автоматизация процесса построения вычислительной подсистемы цифрового двойника является высокоэффективным решением для преодоления перечисленных выше проблем. В настоящей статье предлагается методический подход к автоматизации построения вычислительной подсистемы цифрового двойника ИЭС. Этот подход предполагает использование современных средств метапрограммирования в рамках единой программной платформы для выполнения автоматизированного построения. В процессе построения реализуется методология Model-Driven Engineering и используются знания о предметной области, формализованные в виде онтологий. Цифровой двойник. полученный в результате практического применения предложенного методического подхода, позволяет проводить компьютерное и математическое моделирования ИЭС в виртуальном пространстве с исследованием различных конфигураций их построения.

*Ключевые слова:* интегрированная энергетическая система, онтология, автоматизация вычислений, автоматизация программирования, Model-Driven Engineering, цифровой двойник

**DOI:** 10.31857/S0002331024020015

#### введение

Современные города и промышленные центры обладают развитой энергетической инфраструктурой, включающей системы топливо-, электро-, тепло- и хладоснабжения. Эти системы имеют большое социальное и экономическое значение. Создание новой технологической структуры в виде интегрированной энергетической системы (ИЭС) на базе нескольких отдельно функционирующих энергосистем позволяет существенно расширить их функциональные возможности, обеспечить взаимозаменяемость энергоносителей, реализовать синергетический эффект, обеспечив надежность, безопасность, экономичность энергоснабжения, а также снижение негативного воздействия на окружающую среду.

ИЭС — это сложные технические системы с разветвленными сетями и сложной структурной конфигурацией. Они включают в себя многочисленные энергетические системы, каждая из которых содержит подсистемы, выполняющие свои функции (выработка, транспортировка, распределение и потребление энергии). Каждая из этих подсистем состоит из элементов со своими наборами оборудования.

Проектирование ИЭС является довольно сложной задачей из-за их сложной конфигурации, широкого спектра применяемого оборудования и разнообразного набора математических моделей, используемых для его моделирования. Проектирование ИЭС часто включает в себя моделирование всех подсистем, наборов их элементов и оборудования с учетом технических и технологических решений для интеграции систем различных типов. Решить проблему проектирования ИЭС невозможно без специализированного программного обеспечения, которое создает условия для повышения эффективности проектирования, качества проектных решений и автоматизации трудоемких вычислительных операций.

Обеспечение высокого качества программного инструментария для проектирования ИЭС предполагает объединение методического, математического и программного обеспечения в рамках единого информационного пространства, где реализуются информационные связи с проектируемым объектом. В настоящее время инструмент с указанными характеристиками соответствует концепции цифрового двойника (ЦД).

Для эффективного внедрения цифрового двойника в процесс проектирования важно обеспечить высокий уровень гибкости при его построении. Это объясняется главным образом тем, что он позволяет точно моделировать разнообразное оборудование. Также важно адаптировать используемые методы и алгоритмы к конкретной задаче в контексте ее решения. Подходы, направленные на автоматизацию построения цифрового двойника ИЭС, позволяют преодолеть описанные трудности.

В статье предлагается оригинальный методический подход к автоматизации вычислений, основанный на цифровом двойнике ИЭС для решения задач ее проектирования. Приведена структура этого подхода. Предложена методика автоматизированного построения вычислительной подсистемы цифрового двойника и продемонстрировано ее применение на практическом примере.

#### ОПИСАНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ФОРМУЛИРОВКА ЦЕЛЕЙ ИССЛЕДОВАНИЯ

Математическое моделирование интегрированных энергетических систем, осуществляемое при их проектировании, предполагает решение подзадач, имеющих общие содержательные и математические постановки. Поэтому методы, алгоритмы и специальное программное обеспечение, используемые для их решения, могут носить универсальный характер. Однако используемые программные средства не обеспечивают универсальности, что обусловлено следующими причинами. Подготовка к проведению вычислений и сам процесс вычислений сталкиваются с трудностями, связанными с использованием целого ряда математических моделей оборудования для элементов ИЭС. Программные реализации методов и алгоритмов не отделены от программных реализаций моделей элементов ИЭС. В результате их адаптация к конкретному набору оборудования при решении практических задач затруднительна, поскольку необходимо изменять программные компоненты для моделируемого оборудования. Поддерживать в актуальном состоянии весь набор необходимых программных компонентов, реализующих математические модели оборудования различных подсистем ИЭС, является непростой задачей.

Использование компонентного подхода для создания цифрового двойника ИЭС обеспечивает универсальные реализации программных компонентов, которые можно повторно использовать при разработке программного обеспечения. Для успешного применения этого подхода крайне важно установить такие принципы реализации программных компонентов, которые обеспечат разделение методов и моделей, а также их адаптируемость и полную интеграцию в единую программную систему. Все это необходимо для эффективного решения прикладных задач проектирования ИЭС.

Процесс проектирования ИЭС предполагает использование широкого спектра методов и алгоритмов, каждый из которых должен быть реализован в виде программного компонента. ИЭС состоят из подсистем, выполняющих различные энергетические функции, каждая из которых образована компонентами стандартного набора оборудования. Для моделирования этого оборудования необходимо разработать программные компоненты, реализующие его модели. В результате формируется набор компонентов, которые необходимо организовать в библиотеки. Также важной задачей является их универсальное описание и разработка методики их автоматизированной интеграции в единую программную систему при решении задач проектирования ИЭС.

Цифровой двойник объединяет весь комплекс методического, математического и программного обеспечения для проектирования ИЭС, их моделирования в виртуальном пространстве и обеспечивает согласование характеристик с реальными ИЭС. Внедрение цифрового двойника ИЭС требует разработки единого методического подхода к автоматизации вычислений. Этот подход должен учитывать описанные выше трудности моделирования этих систем и предоставлять следующие возможности:

• Моделирование интегрированных энергетических систем с входящим в них различными типами энергетических систем и набором оборудования.

• Реализация комплекса задач по проектированию ИЭС на базе единой программной платформы.

• Автоматизация вычислений на базе цифрового двойника ИЭС при решении задачи ее проектирования.

• Разделение программных реализаций методов (алгоритмов) и моделей элементов ИЭС для обеспечения их универсальности и возможности повторного использования.

#### ОБЗОР НАУЧНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Впервые представленная М. Гривсом [1] концепция цифрового двойника включала в себя три компонента: цифровую (виртуальную) часть, реальный физический продукт и связь между ними. В работе [2] представлен обзор истории развития цифрового двойника, его современных определений и моделей, а также приведены шесть типов ключевых технологий. Ф. Тао и др. в своей работе [3] расширили концепцию цифрового двойника до пяти компонентов, включая данные и сервис. В целом компоненты продукта или жизненного цикла продукта можно рассматривать как цифровые двойники. В работе [4] приведено исследование разницы между технологией управления жизненным циклом продукта (PLM) и цифровым двойником. В этой работе делается вывод, что PLM больше ориентирована на управление компонентами. пролуктами и системами компании на протяжении всего их жизненного цикла, тогда как цифровой двойник может представлять собой набор моделей для мониторинга и обработки данных в режиме реального времени. В некоторых случаях может быть целесообразнее разбить продукт или компоненты жизненного цикла продукта на подкомпоненты, создать несколько цифровых двойников и установить связи между ними [5]. Существуют работы, где рассматривается шестиуровневая архитектура взаимодействия, в которой цифровые двойники низкого уровня объединяются в большие цифровые двойники высокого уровня [6].

В статье [7] приведено описание пятимерной модели цифрового двойника, которая, по мнению авторов, обладает хорошей применимостью и масштабируемостью, а также может служить общей моделью для использования цифровых двойников в различных областях. В той же работе предпринята попытка изучить и обобщить широко используемые технологии и инструменты цифровых двойников. В статье отмечается, что из-за различий в форматах, протоколах и стандартах существующие инструменты не могут быть интегрированы и одновременно использованы для решения конкретной прикладной задачи. В исследовании [8] рассматривается проблема стандартизации данных в рамках цифрового двойника и предлагается подход к ее решению.

В работе [9] рассматриваются различные научные и промышленные разработки и выявляются проблемы реализации, с которыми сталкивается технология цифрового двойника. Одним из основных недостатков является различие в определениях и компонентах цифрового двойника. В данной работе авторы приходят к выводу, что развитие технологий машинного обучения и больших данных существенно повлияло на формулировку концепции цифрового двойника.

В настоящее время активно ведутся исследования по разработке методологии создания и использования цифровых двойников. В работе [10] предложен подход к построению ИТ-инфраструктуры для создания интеллектуальных систем управления развитием и эксплуатацией энергетических систем. Этот подход основан на результатах системных исследований энергетики и использует современные концепции, такие как цифровые двойники и цифровые образы. В статье [11] рассматривается современное состояние исследований цифровых двойников, где акцентируется внимание на ключевые компоненты, текущие разработки и применение цифровых двойников в промышленности. Важнейшие требования к цифровым двойникам промышленных энергосистем определены в [12]. Растет число работ, исследующих различные характеристики технологии цифровых двойников применительно к ИЭС. В работе [13] обсуждаются технические основы технологии цифровых двойников

ИЭС и анализируется ее применение. Авторы статьи [14] исследуют подход к использованию технологий цифровых двойников в ИЭС и предлагают инфраструктуру для цифровых двойников на аппаратной основе. В исследовании [15] предложена структура цифрового двойника для решения задач управления ИЭС. В статье также представлен процесс автоматизации генерации модели, обеспечивающий отражение цифровой модели физической системы в виртуальное пространство. В статье [16] исследуется использование технологии цифровых двойников для моделирования региональной интегрированной энергетической системы при реализации концепции "умных городов". На конкретных примерах показано, что практическое внедрение технологии цифровых двойников обеспечивает получение значительного экономического эффекта. В статье [17] для создания архитектуры цифрового двойника для интегрированной энергетической системы совместно используется цифровое моделирования в реальном времени.

Некоторые исследователи предлагают использовать семантические сети для создания цифрового двойника [18–20]. Онтологии могут служить основой для разработки цифровых двойников. Некоторые статьи посвящены примерам применения онтологий при реализации цифровых двойников. Например, авторы [21] анализируют проблемы управления данными цифровых двойников и предлагают использовать онтологии для их решения. Предложенный подход обеспечивает гибкость хранения знаний на протяжении всего жизненного цикла цифрового двойника. В работе [22] представлена общая архитектура цифровых двойников промышленных энергосистем, которая обеспечивает гибкость этих систем и оптимальную их работу. Онтологии используются для хранения информации о ресурсах и сервисах. Используется иерархический подход к проектированию, который включает в себя как онтологию верхнего уровня, так и онтологию предметной области. В исследовании [23] онтология рассматривается как представление цифрового двойника в контексте киберфизических систем. В статье [24] рассмотрены предпосылки применения онтологического подхода к построению цифрового двойника с учетом имеющихся результатов в области онтологического проектирования энергетических систем.

С тех пор как крупные организации проявили интерес к технологиям цифрового двойника, развитие этих технологий значительно ускорилось. В результате появились новые подходы и программные инструменты, облегчающие разработку цифровых двойников. Приведем некоторые из них. Корпорация General Electric разрабатывает и внедряет отраслевую технологию цифровых двойников на базе платформы PREDIX [25]. Корпорация Microsoft предложила платформу Azure Digital Twins, которая предоставляет возможность построения цифрового двойника [26]. Платформа Paladin DesignBase [27] обеспечивает создание цифровых двойников, которые позволяют моделировать, проводить сложный анализ и оптимизировать энергетические системы. В статье [28] предложена архитектура для интеллектуального города, которая рассматривается в качестве основы для разработки платформы цифровых двойников.

Внедрение цифровых двойников предполагает использование сложных программных систем, реализация которых требует использования передовых подходов к разработке программного обеспечения. Подобные подходы являются предметом исследований многих специалистов и широко представлены в литературе. Основой для моделирования современного программного обеспечения является объектно-ориентированный подход [29, 30]. В работах [31–34] предлагается методология Model-Driven Engineering (MDE) для автоматизации этапов создания программного обеспечения. Данная методология представляет собой совокупность подходов к автоматизированному построению сложных программных систем на основе предварительно разработанных моделей [35]. Подход MDE в настоящее время находится в стадии активного развития. Применение методов, основанных на моделях, позволяет успешно разрабатывать сложные программные системы [36–39]. Подходы к автоматизации этапов создания программного обеспечения на основе метапрограммирования описаны в работах [40–42].

#### МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД И ЕГО КОМПОНЕНТЫ

В настоящей статье предлагается методический подход к автоматизации вычислений на основе цифровых двойников для решения разнообразных задач проектирования ИЭС. Предлагаемый подход включает в себя следующие составляющие:

• принципы разработки программной платформы;

• архитектуру программной платформы;

• методику автоматизированного построения вычислительной подсистемы цифровых двойников;

• принципы обеспечения универсальности программных компонентов.

Особенностью предлагаемого подхода к решению задач проектирования ИЭС является использование единого универсального математического обеспечения, разработанного на основе математических моделей, методов и алгоритмов теорий гидравлических и электрических цепей. В рамках предлагаемого подхода математическое обеспечение реализовано в виде библиотек программных компонентов, которые могут быть повторно использованы при построении цифровых двойников различных ИЭС. Это позволяет преодолеть трудности, возникающие при большом разнообразии оборудования ИЭС и многочисленных математических моделей, используемых для его описания. Библиотеки программных компонентов являются частью разработанной в нашем исследовании программной платформы как единой основы для автоматизированного построения цифрового двойника ИЭС.

Разработка данной программной платформы базируется на следующих принципах.

1. Автоматизированное построение цифрового двойника на базе программной платформы в контексте решения задач проектирования ИЭС.

2. Разделение программных реализаций методов (алгоритмов) и моделей элементов ИЭС для обеспечения их универсальности и возможности повторного использования.

3. Стандартизация в рамках платформы интерфейсов программных компонентов, реализующих методы (алгоритмы) и модели элементов ИЭС, и их организация в виде библиотек программных компонентов.

4. Применение методологии MDE и современных технологий метапрограммирования на базе программной платформы для автоматизации построения цифрового двойника.

5. Интеграция методов решения задач и моделей элементов ИЭС осуществляется в контексте решения задачи проектирования ИЭС, и этот процесс контролируется знаниями, организованными в виде онтологии программного обеспечения.

Универсальность программной реализации методов решения задач и моделей компонентов ИЭС обеспечивается раздельной программной реализацией методов решения задач и моделей компонентов ИЭС. Их интеграция осуществляется в контексте решения прикладной задачи (рис. 1). Автоматизированное построение вычислительной подсистемы цифрового двойника, в рамках которой интегрируются методы и модели, осуществляется за счет применения идей методологии MDE. Особенностью реализации этой методологии является то, что построение управляется описанием структурной конфигурации моделируемой ИЭС и универсальным описанием программных компонентов, содержащимся в онтологии программного обеспечения.

Предлагается программная платформа, разработанная на языке программирования Java, для использования в качестве единой основы автоматизированного построения цифрового двойника ИЭС. Архитектура программной платформы представлена на рис. 2. Она включает в себя следующие составляющие:

- 1) графическую подсистему;
- 2) подсистему хранения данных;
- 3) библиотеки программных компонентов;
- 4) онтологию программного обеспечения.

Графическая подсистема обеспечивает создание компьютерной модели ИЭС, в которой отражается структурная конфигурация системы, исходные характеристики ее элементов, технические ограничения и проектные ограничения по построению ИЭС. Графическая подсистема позволяет пользователю просматривать данные в удобном для восприятия виде и вносить необходимые изменения.

Подсистема хранения данных обеспечивает организацию работы с различными базами данных, которые используются для хранения и повторного использования компьютерных моделей ИЭС, исходных данных и результатов расчетов, данных по объектам городской застройки.

Библиотеки программных компонентов инструментальной платформы (в соответствии со своим предназначением) подразделяются на следующие группы.

1. Библиотека компонентов, содержащих реализации математических методов и алгоритмов для решения задач проектирования ИЭС.

2. Библиотека моделей элементов ИЭС, включающая программные компоненты, реализующие модели различного оборудования энергетической системы.



Рис. 1. Иллюстрация принципа построения программной системы.



Рис. 2. Архитектура программной платформы.

Онтология программного обеспечения предназначена для хранения знаний, необходимых для автоматизации построения и использования программного обеспечения. Данная онтология содержит описание:

• программных компонентов, реализующих математические методы и алгоритмы решения задач проектирования ИЭС;

- программных компонентов, реализующих модели элементов ИЭС;
- метаданных (входные и выходные параметры, описание форматов данных);
- технологий реализации и интерфейсов доступа к программным компонентам.

Платформа используется для построения цифрового двойника ИЭС в автоматизированном режиме. Цифровой двойник включает в себя (рис. 2):

• компьютерную модель ИЭС;

• программные компоненты, содержащие реализации математических методов и алгоритмов решения задач проектирования ИЭС;

• программные компоненты, реализующие модели элементов ИЭС.

Для обеспечения динамической интеграции программных компонентов были сформулированы принципы, обеспечивающие их универсальность. Эти принципы проиллюстрированы на рис. 3. Для обеспечения унифицированного способа доступа к загружаемым в память программным компонентам, реализующим модели элементов ИЭС, предлагается следующее решение. Каждая модель элемента ИЭС имеет свой уникальный идентификатор. Хранение моделей организовано в хэш-таблице, где идентификатор модели используется в качестве ключа, по которому можно получить ссылку на программный компонент, реализующий соответствующую модель.

Программный компонент, реализующий метод решения конкретной прикладной задачи, включает в себя основной класс на языке Java, который обеспечивает единый стандартизованный доступ к компоненту (рис. 3). При этом возможно использование вспомогательных классов или вычислительных модулей, реализованных на компилируемых языках программирования (C, C++, FORTRAN). В ходе вычислительного процесса программный компонент, реализующий метод решения конкретной прикладной задачи, получает от компьютерной модели сетевую конфигурацию моделируемой системы. При расчете параметров конкретного компонента обращение к его модели осуществляется по ссылке, получаемой из хэш-таблицы по его идентификатору.

#### МЕТОДИКА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПОДСИСТЕМЫ ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА

Для проведения расчетов в первую очередь необходимо разработать компьютерную модель конкретной ИЭС. Эта модель должна отражать свойства системы, включая ее структурную конфигурацию, набор используемого оборудования и его свойства, а также исходные параметры элементов системы. Разработанная модель сохраняется в базе данных для повторного использования. Далее формализуется прикладная задача, уточняется набор оборудования, допустимого к установке, и условия решения прикладной задачи.

Автоматизированное построение вычислительной подсистемы цифрового двойника осуществляется в соответствии с предложенной в данной работе методикой, которая включает следующие этапы (рис. 4).

Этап 1. Автоматизированное построение модели вычислительной подсистемы.

Данный этап предполагает построение модели в автоматизированном режиме. Эта модель описывает вычислительную подсистему цифрового двойника ИЭС и представляет собой набор структур данных, описывающих вычислительную подсистему.

В ходе этого процесса решаются следующие подзадачи:

1. Выбор методики решения задачи на основе описания задачи проектирования с использованием цифрового двойника ИЭС.

2. Определение программного компонента, реализующего методику решения проектной задачи, на основе онтологии программного обеспечения.

3. Определение методов и алгоритмов, необходимых для решения задачи, в соответствии с описанием методики.

4. Определение программных компонентов, реализующих необходимые методы и алгоритмы, на основе онтологии программного обеспечения.



Рис. 3. Иллюстрация интеграции методов и моделей.

5. Составление списка моделируемого оборудования на основе описания сетевой конфигурации цифрового двойника ИЭС.

6. Определение программных компонентов, реализующих модели необходимых элементов ИЭС, на основе онтологии программного обеспечения.

7. Загрузка описания необходимых программных компонентов из онтологии программного обеспечения.

8. Построение структур данных, описывающих необходимые программные компоненты.

9. Конструирование общей модели строящейся вычислительной подсистемы.

Этап 2. Автоматизированное построение вычислительной подсистемы цифрового двойника на основе его модели с использованием современных средств метапрограммирования.

На этом этапе решаются следующие подзадачи:

1. Настройка загрузчика программных компонентов на работу с необходимыми библиотеками компонентов.

2. Загрузка программных компонентов, реализующих общую методику решения задачи, математические методы и алгоритмы.



Рис. 4. Содержание методики автоматизированного построения вычислительной подсистемы цифрового двойника.

3. Построение структур данных для хранения программных компонентов, загруженных на предыдущем шаге.

4. Загрузка программных компонентов, реализующих модели элементов ИЭС.

5. Построение структур данных для хранения программных компонентов, загруженных на предыдущем шаге.

Этап 3. Применение цифрового двойника при разработке рекомендаций по проектированию ИЭС.

Данный этап предполагает решение прикладных задач. В ходе этого процесса происходит интеграция методов и моделей элементов ИЭС. Схема взаимодействия программных компонентов при автоматизированном построении вычислительной подсистемы цифрового двойника в соответствии с предлагаемой методикой приведена на рис. 5. Автоматизированное построение вычислительной подсистемы цифрового двойника ИЭС опирается на современные средства метапрограммирования. Используется рефлексия, которая представляет собой разновидность метапрограммирования и является расширением парадигмы объектно-ориентированного программирования. Рефлексия позволяет выполнять операции, которые невозможно осуществить в классическом объектно-ориентированном программировании. Наиболее важными из них являются изучение классов в процессе выполнения программы, определение их полей, методов и конструкторов, создание новых экземпляров объектов по имени класса с помощью конструкторов, установка и получение значений полей по их имени, вызов методов по их имени и описанию аргумента, гибкая работа с массивами и контейнерами (коллекциями). С помощью рефлексии компоненты динамически подключаются к конструируемой программной системе и настраиваются для решения поставленной задачи.

#### АПРОБАЦИЯ МЕТОДИЧЕСКОГО ПОДХОДА

Предложенный в статье методический подход использован для программной реализации прототипа программной платформы для решения задач проектирования ИЭС. На базе платформы построен цифровой двойник ИЭС одного из районов г. Иркутска. Расчетная схема системы представлена на рис. 6. За основу взяты действующие в настоящее время системы электроснабжения и отопления. Кроме того, для рассмотрения одного из возможных вариантов их развития в схему включены активные потребители с их источниками электрической и тепловой энергии. Представленная схема включает в себя следующие субъекты: семь обычных потребителей; восемь активных потребителей; восемь электрических бойлеров для выработки тепла; восемь фотоэлектрических систем для выработки электроэнергии; шестнадцать кабельных линий; двадцать три тепловые магистрали; один централизованный источник тепловой энергии.

На разработанном прототипе программной платформы был проведен вычислительный эксперимент по развитию ИЭС. На основе расчетов было найдено компромиссное решение по распределению мощности между централизованными и распределенными источниками энергии в ИЭС. Мощность централизованных источников в системах электроснабжения и теплоснабжения составила 35 МВт и 54 Гкал/ч соответственно. При таких значениях не происходит увеличения стоимости централизованного энергоснабжения потребителей. В этом случае общие затраты на отопление составляют 2171.5 тыс. руб., на электроснабжение — 1816.8 тыс. руб.

Проведенный вычислительный эксперимент показывает работоспособность и эффективность предложенных решений, которые позволили снизить общую стоимость энергоснабжения потребителей за счет перераспределения мощности между централизованными и распределенными источниками генерации в процессе развития ИЭС.

#### выводы

Построение ИЭС на базе традиционных энергосистем, работающих раздельно, обеспечивает повышение эффективности и надежности энергоснабжения потребителя. Проектирование ИЭС может быть сложной задачей вследствие высокой сложности



Рис. 5. Общая схема построения вычислительной подсистемы цифрового двойника.

этих систем. Цифровой двойник позволяет объединить все необходимые для проектирования инструменты в едином информационном пространстве. Программные средства, реализующие цифровые двойники ИЭС и разрабатываемые для их проектирования, требуют высокой гибкости в организации расчетов. Это требование необходимо для моделирования различных типов оборудования и привлечения широкого спектра методов и математических моделей. Автоматизация построения вычислительной подсистемы является эффективным решением для преодоления указанных трудностей. В статье предложен новый методический подход к автоматизации построения вычислительной подсистемы цифрового двойника ИЭС. В соответствии с этим подходом автоматизированное построение осуществляется с использованием современных



Рис. 6. Схема ИЭС района г. Иркутска.

средств метапрограммирования на базе программной платформы. В процессе построения реализуется методология MDE и используются знания, формализованные в виде онтологий.

В статье представлены составляющие предлагаемого методического подхода к автоматизации построения вычислительной подсистемы цифрового двойника, включающие принципы разработки программной платформы; архитектуру программной платформы; методику автоматизированного построения вычислительной подсистемы цифрового двойника; принципы обеспечения универсальности программных компонентов. Цифровой двойник, полученный в результате применения предложенного методического подхода, позволяет проводить компьютерное и математическое моделирование ИЭС в виртуальном пространстве и исследовать его различные конфигурации. Моделирование на основе цифрового двойника ИЭС позволяет реализовать гибкие и эффективные подходы к проектированию ИЭС и получить рекомендации по проектированию для создания реальных ИЭС.

Исследование выполнено в Институте систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-29-01611).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Grieves M*. Digital twin: manufacturing excellence through virtual factory replication, white paper // Whitepaper, Florida Institute of Technology: Florida, USA, 2015. P. 1–7.
- 2. *Hu W., Zhang T., Deng X., Liu Z., Tan J.* Digital twin: a state-of-the-art review of its enabling technologies, applications and challenges // Journal of Intelligent Manufacturing and Special Equipment, 2021. V. 2. № 1. P. 1–34.
- Tao F., Cheng J., Qi Q., Zhang M., Zhang H., Sui F. Digital twin-driven product design, manufacturing and service with big data // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2018. V. 94. P. 3563–3576.
- Adamenko D., Kunnen S., Nagarajah A. Digital twin and product lifecycle management: What is the difference? // IFIP Advances in Information and Communication Technology, 2020. V. 594. P. 150–162.
- Malakuti S., Schmitt J., Platenius-Mohr M., Grüner S., Gitzel R., Bihani P. A four-layer architecture pattern for constructing and managing digital twins // In Software Architecture. ECSA 2019. Lecture Notes in Computer Science, 2019. V. 11681. P. 231–246.
- Redelinghuys A.J.H., Kruger K., Basson A. A six-layer architecture for digital twins with aggregation // In Service Oriented, Holonic and Multi-agent Manufacturing Systems for Industry of the Future. SOHOMA 2019. Studies in Computational Intelligence, 2020. V. 853. P. 171–182.
- 7. Qi Q., Tao F., Hu T., Anwer N., Liu A., Wei Y., Wang L., Nee A.Y.C. Enabling technologies and tools for digital twin // Journal of Manufacturing Systems, 2021. V. 58. P. 3–21.
- Fonseca Í.A., Gaspar H.M., Mello de P.C., Sasaki H.A.U. A Standards-Based Digital Twin of an Experiment with a Scale Model Ship // Computer-Aided Design, 2022. V. 145. 103191.
- 9. Sharma A., Kosasih E., Zhang J., Brintrup A., Calinescu A. Digital Twins: State of the art theory and practice, challenges, and open research questions // Journal of Industrial Information Integration, 2022. V. 30. 100383.
- Воропай Н.И., Массель Л.В., Колосок И.Н., Массель А.Г. ИТ-инфраструктура для построения интеллектуальных систем управления развитием и функционированием систем энергетики на основе цифровых двойников и цифровых образов // Известия Российской академии наук. Энергетика, 2021. № 1. С. 3–13.
- 11. *Tao F., Zhang H., Liu A., Nee A.Y.C.* Digital Twin in Industry: State-of-the-Art // IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019. V. 15. № 4. P. 2405–2415.
- 12. Kasper L., Birkelbach F., Schwarzmayr P., Steindl G., Ramsauer D., Hofmann R. Toward a Practical Digital Twin Platform Tailored to the Requirements of Industrial Energy Systems // Applied Sciences, 2022. V. 12. № 14. 6981.

- Li H., Zhang T., Huang Y. Digital Twin Technology for Integrated Energy System and Its Application // In Proceedings of the 1st International Conference on Digital Twins and Parallel Intelligence), Beijing, China, 15 July–15 August 2021; IEEE: New York, NY, USA, 2021. P. 422–425.
- Chen Y., Chen Q., Gao J., Li Z., Chen X. Hardware-in-loop based Digital Twin Technology for Integrated Energy System: A Case Study of Guangyang Island in Chongqing // In Proceedings of the 5th International Electrical and Energy Conference, Nangjing, China, 27–29 May 2022; IEEE: New York, NY, USA, 2022. P. 4956–4962.
- Bai H., Yuan Z., Tang X., Liu J., Yang W., Pan S., Xue Y., Liu W. Automatic Modeling and Optimization for The Digital twin of a Regional Multi-energy System // In Proceedings of the Power System and Green Energy Conference, Shanghai, China, 25–27 August 2022; IEEE: New York, NY, USA, 2022. P. 214–219.
- Huang W., Zhang Y., Zeng W. Development and application of digital twin technology for integrated regional energy systems in smart cities // Sustainable Computing: Informatics and Systems, 2022. V. 36. 100781.
- Xing J., Sun S., Yu P., Li Y., Cheng Y., Wang Y., Li S., Zhu J. Multi-energy Simulation and Optimal Scheduling Strategy Based on Digital Twin // 2022 Power System and Green Energy Conference (PSGEC), Shanghai, China, 2022. P. 96–100.
- Sharif Ullah A.M.M. Modeling and simulation of complex manufacturing phenomena using sensor signals from the perspective of Industry 4.0 // Advanced Engineering Informatics, 2019.
   V. 39. P. 1–13.
- Kannan K., Arunachalam N. A Digital Twin for Grinding Wheel: An Information Sharing Platform for Sustainable Grinding Process // Journal Manufacturing Science Engineering, 2019. V. 141. № 2. 021015.
- Moreno A., Velez G., Ardanza A., Barandiaran I., de Infante Á.R., Chopitea R. Virtualisation process of a sheet metal punching machine within the Industry 4.0 vision // International Journal on Interactive Design and Manufacturing, 2017. V. 11. P. 365–373.
- Singh S., Shehab E., Higgins N., Fowler K., Reynolds D., Erkoyuncu J.A., Gadd P. Data management for developing digital twin ontology model // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture, 2020. V. 235. № 14. P. 2323–2337.
- 22. Steindl G., Stagl M., Kasper L., Kastner W., Hofmann R. Generic Digital Twin Architecture for Industrial Energy Systems // Applied Sciences, 2020. V. 10. № 24. 8903.
- Steinmetz C., Rettberg A., Ribeiro F.G.C., Schroeder G., Pereira C.E. Internet of Things Ontology for Digital Twin in Cyber Physical Systems // In Proceedings of the VIII Brazilian Symposium on Computing Systems Engineering, Salvador, Brazil, 5–8 November 2018; IEEE: New York, NY, USA, 2018. P. 154–159.
- Массель Л.В., Ворожцова Т.Н. Онтологический подход к построению цифровых двойников объектов и систем энергетики // Онтология проектирования, 2020. Т. 10. №3 (37). С. 327–337.
- GE, PREDIX [Электронный pecypc]. URL: https://www.ge.com/digital/applications/digitaltwin (дата обращения: 05.09.2023).
- Azure Digital Twins [Электронный ресурс]. URL: https://docs.microsoft.com/en-us/azure/ digital-twins/ (дата обращения: 05.09.2023).
- Paladin DesignBase [Электронный ресурс]. URL: https://www.easypower.com/products/ paladin-designbase (дата обращения: 05.09.2023).

- Dani A.A.H., Supangkat S.H., Lubis F.F., Nugraha I.G.B.B., Kinanda R., Rizkia I. Development of a Smart City Platform Based on Digital Twin Technology for Monitoring and Supporting Decision-Making // Sustainability, 2023. V. 15. 14002.
- 29. Booch G., Rumbaugh J., Jacobson I. The Unified Modeling Language User Guide, 2nd. ed. / Addison Wesley, Boston, 2005. P. 475.
- Booch G. Object-Oriented Analysis and Design with Applications, 3rd. ed. / Addison Wesley, Boston, 2007. P. 720.
- Silva da A.R. Model-driven engineering: A survey supported by the unified conceptual model // Computer Languages, Systems & Structures, 2015. V. 43. P. 139–155.
- 32. *Brambilla M., Cabot J., Wimmer M.* Model-driven software engineering in practice. In Synthesis Lectures on Software Engineering; Morgan & Claypool: Kentfield, CA, USA, 2012. P. 191.
- Seixas J., Ribeiro A., Rodrigues da Silva A. A Model-Driven Approach for Developing Responsive Web Apps // Proceedings of the 14th International Conference ENASE 2019. SciTePress, Setubal, 2019. P. 257–264.
- 34. *Akdur D., Garousi V., Demirörs O.* A survey on modeling and model-driven engineering practices in the embedded software industry // Journal of Systems Architecture, 2018. V. 91. P. 62–82.
- 35. Stennikov V.A., Barakhtenko E.A., Sokolov D.V. Development of Information and Technology Platform for Optimal Design of Heating Systems // In Proceedings of the 7th Scientific Conference on Information Technologies for Intelligent Decision Making Support. 28–29 May 2019, Ufa, Russia; Atlantis Press: Paris, France, 2019.
- Boussaïd I., Siarry P., Ahmed-Nacer M. A survey on search-based model-driven engineering // Automated Software Engineering, 2017. V. 24. P. 233–294.
- Al-Azzoni I., Blank J., Petrović N. A Model-Driven Approach for Solving the Software Component Allocation Problem // Algorithms, 2021. V. 14. 354.
- Araújo Silva E., Valentin E., Carvalho J.R.H., Silva Barreto R. A survey of Model Driven Engineering in robotics // Journal of Computer Languages, 2021. V. 62. 101021.
- Stennikov V., Barakhtenko E., Sokolov D., Mayorov G. Principles of Building Digital Twins to Design Integrated Energy Systems // Computation, 2022. V. 10. 222.
- Hazzard K., Bock J. Metaprogramming in NET / Manning Publications: Shelter Island, NY, USA, 2013. P. 360.
- 41. *Lämmel R*. Software Languages: Syntax, Semantics, and Metaprogramming / Springer: Cham, Switzerland, 2018.
- 42. Stennikov V.A., Barakhtenko E.A., Sokolov D.V. A Methodological Approach to the Software Development for Heating System Design // In Proceedings of the International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies, Vladivostok, Russia, 3–4 October 2018; IEEE: New York, NY, USA, 2018.

## Automation of Computations in Designing an Integrated Energy System Based on Its Digital Twin

V. A. Stennikov, E. A. Barakhtenko\*, D. V. Sokolov, G. S. Mayorov

Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia \*e-mail: barakhtenko@isem.irk.ru

The construction of integrated energy systems (IESs) based on traditional energy systems operating separately provides higher efficiency and reliability of energy supply to consumers. However, IESs are complex structures to design. A digital twin is a tool that allows you to combine all the tools necessary for design in a single information space. Software tools that implement the digital twin of IESs require high computational flexibility, which is due to the need to simulate a variety of equipment and involve a wide range of methods and mathematical models. Automating the construction process of a computing subsystem is a highly efficient solution for overcoming the challenges mentioned above. This paper proposes a methodological approach to automating the construction of the computing subsystem of the digital twin of an IES. The proposed approach involves using modern metaprogramming tools on a software platform to perform automated construction. During construction, the Model-Driven Engineering concept is implemented and knowledge formalized in the form of ontologies is used. The digital twin, obtained as a result of the practical application of the proposed methodological approach, enables computer and mathematical modeling of an IES in virtual space, with exploration of various configurations of its construction.

*Keywords:* integrated energy system, ontology, automation of calculations, automation of programming, Model-Driven Engineering, digital twin

УДК 338.24:621.3

# АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ЭНЕРГОСНАБЖЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОХОЛОДАНИЙ ПРИ КРУПНОМАСШТАБНЫХ НЕШТАТНЫХ СИТУАЦИЯХ В ГАЗОВОЙ ОТРАСЛИ

© 2024 г. С. М. Сендеров\*, Н. М. Береснева

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Иркутск, Россия \*e-mail: ssm@isem.irk.ru

> Поступила в редакцию 25.10.2023 г. После доработки 17.06.2024 г. Принята к публикации 22.06.2024 г.

В статье представлены основные составляющие методического подхода к анализу возможностей поставки конечных видов энергии потребителям при потере работоспособности критически важных объектов газовой отрасли России в условиях похолоданий на территориях федеральных округов. Описывается принцип выбора территориального разреза для анализа ситуации с одновременным повышением спроса на ТЭР. Приводится алгоритм проведения исследований. Исследования проводятся путем моделирования работы ТЭК страны в период средних суток января в условиях пиково возрастающего спроса на тепловую энергию на территориях федеральных округов. При этом похолодание моделируется поочередно по каждому из федеральных округов в зоне действия Единой системы газоснабжения России. Анализ возможностей удовлетворения потребностей в конечных видах энергии по субъектам РФ проводится по всем ключевым сценариям похолодания и потери работоспособности критически важных объектов газовой отрасли. Показаны принципы моделирования ситуации с поставкой конечных видов энергии потребителям в указанных ситуациях. Выявляются наиболее уязвимые в анализируемых условиях регионы и делается вывод о необходимости взвешенного подхода к определению оптимальной степени доминирования природного газа в топливно-энергетическом балансе регионов с учетом имеющихся возможностей осуществления его поставок в условиях крупномасштабных чрезвычайных ситуаций в газовой отрасли.

Ключевые слова: критически важные объекты, надежность топливо- и энергоснабжения, газовая отрасль, недоотпуск электрической и тепловой энергии

**DOI:** 10.31857/S0002331024020026

#### введение

Исследования, касающиеся анализа последствий крупномасштабных чрезвычайных ситуаций (ЧС) в энергетике, сопровождающихся снижением, вплоть до полной потери, работоспособности отдельных энергетических объектов ведутся уже достаточно длительный период [1, 2]. За это время были разработаны подходы к выявлению критически важных объектов (КВО) энергетики и сформулированы соответствующие алгоритмы [3–5]. В данных исследованиях было показано, что далеко не всегда в условиях потери работоспособности тех или иных объектов энергетики возможно обеспечить бездефицитное энергоснабжение потребителей. Наибольшую опасность для такого бездефицитного топливо- и энергоснабжения потребителей представляют преднамеренные воздействия, ограничивающие производственные возможности указанных КВО систем энергетики (СЭ). При этом наиболее неприятных последствий для потребителей следует ожидать в периоды повышенного спроса на соответствующие виды энергии. Для России это холодные зимние месяцы. Аппарат использования коэффициентов сезонной неравномерности потребления конечных видов энергии позволяет оценивать потребности в ТЭР в усредненные наиболее холодные сутки в том или ином регионе. Однако достаточно сложно оценить возможности удовлетворения спроса на конечные виды энергии в условиях его пикового повышения, к примеру, при значительных похолоданиях. Здесь требуется решение двух вопросов: хватит ли производственных возможностей ТЭК страны по обеспечению такого пиково возрастающего спроса и что будет, если именно в этот период придется иметь дело с потерей работоспособности отдельных КВО энергетики? В данной статье предлагается подход, позволяющий ответить на данные вопросы на примере КВО газовой отрасли России.

# ВЫБОР ТЕРРИТОРИИ ДЛЯ АНАЛИЗА СИТУАЦИИ С ОДНОВРЕМЕННЫМ ПОВЫШЕНИЕМ СПРОСА НА ТОПЛИВНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РЕСУРСЫ

При проведении заявленного выше анализа возникает вопрос: корректно ли рассматривать ситуацию с похолоданием на территории лишь одного региона? Особенно актуален этот вопрос для регионов европейской части страны с их относительно небольшими территориями при относительно высокой плотности населения. Вероятнее всего похолодание со схожими признаками может проявиться одновременно в нескольких соседних регионах. Тогда на территории нескольких регионов будет увеличена потребность в конечных видах энергии. При этом и нагрузка на федеральные системы энергетики будет больше, чем при похолодании в одном регионе. Если уголь с необходимым нормированным запасом находится на угольных ТЭС, то с газом – другая ситуация. В силу ограниченности пропускных способностей отдельных участков газотранспортной сети, в значительной степени обостряются вопросы с обеспечением увеличенного спроса на природный газ. При недостатке таких пропускных способностей могут сформироваться недопоставки природного газа потребителям, в частности, газопотребляющим тепло- и электрогенерирующим мощностям, что в свою очередь способно привести к недоотпуску соответствующих видов ТЭР.

На каком уровне территорий, объединяющих разные регионы, целесообразно остановиться для моделирования одновременного похолодания? Существует устоявшееся понятие климатической зоны. В [6] указано, что климатическая зона — это широкая область земной поверхности, внутри которой создается приблизительно



Рис. 1. Климатическое зонирование России.



Рис. 2. Деление России на федеральные округа.

однородный климат по всей протяженности такой области. На рис. 1 на территории России выделены 5 поясов от тропического к полярному: 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и особый. Весь север России и острова Северного Ледовитого океана расположены в арктическом и субарктическом поясах. Средняя полоса РФ имеет умеренный климатический пояс. Юг находится в субтропиках, но площадь его весьма незначительна – даже 5% территории РФ не входят в эту зону. Из рис. 1 видно, что выделенные климатические зоны очень велики по протяженности и одновременное похолодание со значительным увеличением потребности в КПТ по всей такой зоне вряд ли может наступить. С другой стороны, территория России достаточно обоснованно административно поделена на федеральные округа, рис. 2.

Чаще всего округа характеризуются более компактной (по сравнению с климатическими зонами) территорией. По-видимому, логичнее моделировать одновременное похолодание на территории федерального округа в целом, если анализ касается европейской части России. Собственно, именно эти округа и небольшая часть регионов Сибирского федерального округа и располагаются в зоне действия ЕСГ России. В качестве допущения предлагается так и рассматривать ситуацию с периодами пикового повышения спроса на конечные виды энергии — по территориям федеральных округов, располагающихся в зоне действия ЕСГ.

#### ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Предлагаемый порядок исследования следующий:

– моделирование работы ТЭК страны в период средних суток января в условиях пиково возрастающего спроса на тепловую энергию на территории федерального округа (похолодание моделируется поочередно по каждому из федеральных округов в зоне действия ЕСГ); анализ возможностей удовлетворения потребностей в конечных видах энергии по субъектам РФ по всем рассматриваемым сценариям;

– моделирование потери работоспособности ранее выявленных КВО газовой отрасли (по одному) при каждом сценарии похолодания в федеральных округах с учетом возможностей минимизации недопоставок ТЭР потребителям в рамках работы единого ТЭК; анализ возможных объемов недопоставок тепловой, электрической энергии и газа для прямого потребления по субъектам РФ;

 выявление федеральных округов, наиболее подверженных недопоставкам конечных видов энергии в анализируемых условиях с характеристикой ситуации в регионах, входящих в эти округа.

Порядок исследований представлен на рис. 3 в виде соответствующего алгоритма.

#### ЕДИНАЯ СИСТЕМА ГАЗОСНАБЖЕНИЯ РОССИИ

Сложившаяся территориальная структура ЕСГ России обладает рядом существенных недостатков. Сегодня более 85% всего российского газа добывается в северных районах Тюменской области. Основные потребители газа внутри страны – ее европейские регионы и пункты экспортной сдачи газа – расположены в 2–2.5 тыс. км от мест его добычи. Весь этот газ транспортируется на дальние расстояния с помощью газотранспортных многониточных коридоров со значительной концентрацией газовых потоков в одном коридоре. Эти коридоры имеют большое число взаимных пересечений и перемычек. В настоящее время в ГТС России имеется несколько потенциально опасных для функционирования ЕСГ пересечений МГ. Нарушение работы некоторых из них может привести к значительным ограничениям поставок газа потребителям. Значительная часть таких пересечений представляет собой КВО ЕСГ с позиций обеспечения требуемой работоспособности ГТС.



Рис. 3. Алгоритм проведения исследований.

Ранее в исследованиях на базе моделирования газотранспортной сети России были выявлены КВО ЕСГ России, т.е. те объекты газовой отрасли, потеря работоспособности которых может привести к существенным дефицитам газа у потребителей (в относительных объемах 5% и более от суммарной потребности в газе по системе).

Исходные условия для расчетов были следующие: средние сутки максимального потребления газа в сети (январь 2021 г.). В такие сутки работу сети можно считать наиболее напряженной. Суммарный поток газа по сети в эти сутки, учитывая экспорт, составил округленно 2180 млн м<sup>3</sup>, при величине потребления газа внутри страны порядка 1550 млн м<sup>3</sup>/сут. Исследования показали, что потенциальный дефицит газа у потребителей может наблюдаться при прекращении работы 449 объектов ЕСГ (242 узла, 199 дуг и 8 пересечений МГ расчетного графа) из общего количества рассматриваемых в модели объектов (1010 (382 узла и 628 дуг)). Из этого количества объектов ранее [7, 8] был выделен 61 объект, единичные прекращения работы которых способны привести к относительному дефициту газа в 5% и более от суммарной потребности в газе по ЕСГ. Среди этих объектов 22 дуги МГ между узловыми КС, 36 узлов (30 узловых КС, 5 головных КС на выходах с месторождений, 1 КС на выходе с ПХГ) и 3 пересечения МГ между КС. Эти объекты составляют современный перечень КВО ЕСГ.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СИТУАЦИИ С ПОСТАВКОЙ КОНЕЧНЫХ ВИДОВ ЭНЕРГИИ ПОТРЕБИТЕЛЯМ

В результате соответствующих расчетов с использованием модели газовой отрасли [1, 2] с отключением каждого из выявленных КВО были определены возможные в этих случаях дефициты газа по регионам РФ. Далее уже на модели ТЭК [9] решалась задача минимизации указанных негативных последствий для потребителей конечных видов энергии с учетом возможностей взаимозаменяемости разных видов ТЭР и возможностей диверсификации источников конечных видов энергии. При этом потребности каждого региона в конечных видах энергии были агрегированы следующим образом: электроэнергия, тепловая энергия и прямое потребление газа прочими потребителями.

Задача моделирования ТЭК в целом подробно описана в [9] и математически представляет собой классическую задачу линейного программирования. Постановка и ограничения этой задачи записываются следующим образом:

$$AX - \sum_{t=1}^{T} Y^{t} = 0, (1)$$

$$0 \le X \le D,\tag{2}$$

$$0 \le Y^t \le R^t, \tag{3}$$

где t — категории потребителей; А — матрица технологических коэффициентов производства (добычи, переработки, преобразования) и транспорта отдельных видов топлива и энергии; Х — искомый вектор, компоненты которого характеризуют интенсивность использования технологических способов функционирования энергетических объектов (добычи, переработки, преобразования и транспорта энергоресурсов, запасов топлива);  $Y^t$  — искомый вектор, компоненты которого характеризуют объемы потребления отдельных видов топлива и энергии отдельными категориями потребителей (t); D — вектор, определяющий технически возможные интенсивности использования отдельных технологических и производственных способов;  $R^t$  вектор с компонентами, равными объемам заданного потребления отдельных видов топлива и энергии отдельных видов топлива и отребителей.

Целевая функция при этом имеет следующий вид:

$$(C,X) + \sum_{t=1}^{T} (r^t, g^t) \to \min,$$
(4)

где первая составляющая отражает издержки, связанные с функционированием отраслей ТЭК. Здесь С – вектор удельных затрат по отдельным технологическим способам функционирования энергетических объектов; вторая составляющая – ущербы от дефицита по каждому виду топлива и энергии у каждой из выделенных категорий потребителей. Величины дефицита энергоресурсов g<sup>t</sup> у потребителей определяются выражением  $(R^t - Y^t)$ . Вектор  $r^t$  условно обозначает "удельный ущерб" у потребителя.

Данная модель реализована в рамках ПВК "Корректива +" [10]. В результате расчетов определяются: возможные объемы суточного недоотпуска тепловой и электрической энергии потребителям, а также объемы недопоставок газа для его прямого потребления в регионах страны при отключении соответствующих КВО ЕСГ с учетом взаимосвязанной работы всех отраслей ТЭК, запасов ТЭР, возможностей взаимозаменяемости различных видов ТЭР и диверсификации энергоисточников.

#### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Основой для дальнейших исследований послужили величины расчетных недопоставок газа, которые могут сформироваться в условиях реализации соответствующих сценариев. На рис. 4 представлены усредненные относительные недопоставки газа за время указанных нештатных ситуаций по федеральным округам в зоне действия ЕСГ. Из данных рис. 4 видно, что наибольшим образом при реализации вышеуказанных расчетных условий в среднем от недопоставок газа могут пострадать потребители Северо-Западного федерального округа (СЗФО). Дело в том, что в этом округе находятся крупные промышленные потребители газа, полностью зависимые от газотранспортной инфраструктуры. В то же время в этом округе достаточно много крупных пересечений магистральных газопроводов и других критически важных объектов газовой отрасли, выход из строя которых способен в значительной степени о граничить поставки газа потребителям.

Следующим шагом поочередно в каждом из федеральных округов в зоне действия ЕСГ были исследованы возможности удовлетворения потребностей в электрической и тепловой энергии при пиковом увеличении спроса на тепловую энергию с учетом возможных отключений КВО ЕСГ. При этом в рассматриваемых условиях наиболее холодных суток, были приняты следующие приоритеты распределения дефицитов газа: в первую очередь в регионах удовлетворяется потребность на производство тепловой энергии, затем потребности прямого потребления газа и в последнюю очередь — потребности на производство электроэнергии. Такое отношение к потребностям в электроэнергии в исследовании было принято с целью активизации использования в модели электрогенерирующих источников, не потребляющих природный газ. В табл. 1 приведены усредненные относительные величины суммарного дефицита конечных видов энергии при единичных отключениях КВО ЕСГ.

Данные, полученные при моделировании взаимосвязанной работы всех энергетических отраслей, показали, что наибольшим образом от недопоставок конечных видов энергии могут пострадать опять же потребители СЗФО. Средний относительный дефицит газа на прямое потребление (без нужд электро- и теплогенерирующих мощностей) в данном округе самый большой, достаточно велики усредненные относительные недоотпуски электроэнергии и даже присутствуют возможные относительные недоотпуски тепловой энергии, несмотря на вышеуказанную ее приоритетность. Те же проблемы, но в меньшем масштабе, можно отметить в Уральском



**Рис. 4.** Усредненные по рассматриваемым сценариям расчетные относительные недопоставки газа по федеральным округам в зоне действия ЕСГ, %.

и Приволжском федеральных округах. В остальных рассматриваемых округах во всех сценариях с отключением КВО ЕСГ по одному не проявляются возможные дефициты тепловой энергии, а в Южном и в Северо-Кавказском округах полностью удовлетворяется и спрос на газ для его прямого потребления.

Ситуацию, которая могла бы сложиться при реализации анализируемых сценариев в наиболее подверженном недопоставкам конечных видов ТЭР Северо-Западном федеральном округе рассмотрим подробнее по каждому сценарию отключения КВО ЕСГ. На рис. 5 приведена диаграмма, представляющая возможные относительные дефициты электрической и тепловой энергии, а также газа на прямое потребление в СЗФО при отключении отдельных КВО газовой отрасли. Из рисунка видно, что в ряде случаев (отключение КВО ЕСГ № 25, 49, 50, 51 по одному) газ на прямое потребление при принятых приоритетах его распределения в принципе не может быть поставлен. Практически при всех отключениях, представленных на рисунке КВО ЕСГ, можно ожидать недоотпуски электроэнергии, а при отключении каждого из пяти КВО ЕСГ (№ 17, 22, 25, 34, 35) – даже относительные недоотпуски тепловой энергии.

Ниже, в табл. 2–4, представлены расчетные дефициты конечных видов ТЭР по субъектам РФ на территории СЗФО при отключении конкретных КВО ЕСГ в условиях похолодания на территории округа.

Из данных табл. 2 видно, что наибольшие недоотпуски электроэнергии потребителям могут иметь место в Псковской и Калининградской областях. Так, в случаях потери работоспособности по одному 9 КВО ЕСГ, в Псковской области можно ожидать практически полного прекращения отпуска электроэнергии. Это объясняется тем, что вся собственная электроэнергия производится здесь на газе,

| иdп   |              |
|-------|--------------|
| Tam 1 |              |
| окру  |              |
| HbIM  |              |
| раль  |              |
| феде  |              |
| 1 ПО  |              |
| ргии  |              |
| в эне |              |
| видо  |              |
| НЫХ   |              |
| онеч  |              |
| ита к |              |
| фиц   |              |
| го де |              |
| онда  |              |
| SMM   |              |
| IHЫ C |              |
| иниг  |              |
| le Be |              |
| льнь  | %            |
| осите | ECI          |
| OTHC  | KBO          |
| HHBIE | хвин         |
| еднет | іюче         |
| Vcp(  | ( OTKJ       |
| ца 1. | <b>VIHED</b> |
| абли  | ини          |

| ти по |             |                     | Похолодание в фед     | еральных округа | XI          |       |
|---|-------------|---------------------|-----------------------|-----------------|-------------|-------|
| ральный округ,<br>вид ТЭР                 | Приволжский | Северо-<br>Западный | Северо-<br>Кавказский | Уральский       | Центральный | Южный |
|   |             | Πp                  | иволжский             |                 |             |       |
| прямое потр.)                             | 1.0         | 0.7                 | 0.7                   | 1.0             | 1.0         | 1.0   |
| ктроэнергия                               | 6.6         | 6.0                 | 5.6                   | 5.8             | 6.5         | 5.8   |
| товая энергия                             | 0.4         | 0.3                 | 0.3                   | 0.4             | 0.4         | 0.4   |
|   |             | Cebe                | ро-Западный           |                 |             |       |
| прямое потр.)                             | 12.4        | 13.8                | 14.9                  | 12.4            | 12.4        | 12.4  |
| ктроэнергия                               | 5.0         | 4.9                 | 5.0                   | 4.7             | 5.0         | 4.6   |
| повая энергия                             | 0.5         | 0.6                 | 9.0                   | 0.5             | 0.5         | 0.5   |
|   |             | CeBep               | о-Кавказский          |                 |             |       |
| прямое потр.)                             | 0           | 0                   | 0                     | 0               | 0           | 0     |
| актроэнергия                              | 6.9         | 6.9                 | 6.9                   | 6.9             | 6.9         | 6.9   |
| товая энергия                             | 0           | 0                   | 0                     | 0               | 0           | 0     |
|   |             | S                   | ральский              |                 |             |       |
| прямое потр.)                             | 1.8         | 1.8                 | 1.8                   | 2.0             | 1.8         | 1.8   |
| ктроэнергия                               | 5.4         | 5.4                 | 5.4                   | 5.4             | 5.4         | 5.3   |
| повая энергия                             | 0.3         | 0.3                 | 0.3                   | 0.3             | 0.3         | 0.3   |
|   |             | Π                   | нтральный             |                 |             |       |
| прямое потр.)                             | 0.5         | 0.6                 | 9.0                   | 0.5             | 0.5         | 0.5   |
| сктроэнергия                              | 1.8         | 1.7                 | 1.6                   | 1.6             | 1.7         | 1.6   |
| ловая энергия                             | 0           | 0                   | 0                     | 0               | 0           | 0     |
|   |             |                     | Южный                 |                 |             |       |
| прямое потр.)                             | 0           | 0                   | 0                     | 0               | 0           | 0     |
| ктроэнергия                               | 1.8         | 1.8                 | 1.8                   | 1.8             | 1.8         | 1.8   |
|   | ¢           | ¢                   |                       |                 |             |       |

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ЭНЕРГОСНАБЖЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ 29



**Рис. 5.** Расчетный относительный дефицит конечных видов ТЭР в СЗФО в условиях похолодания при отключении КВО ЕСГ, %.

электроэнергия, которая может быть поставлена в область по имеющимся межрайонным связям, также вырабатывается в основном на газе, уровень дефицита которого по субъектам в анализируемой ситуации отчасти демонстрирует табл. 3.

В случае Калининградской области дефицит электроэнергии объясняется также слишком высоким доминированием природного газа (более 95% в балансе КПТ), при том, что область снабжается газом только из одного тупикового магистрального газопровода. В области используется Калининградское ПХГ, но величина максимального отбора газа из него составляет 4.8 млн м<sup>3</sup>/сут при потребности области в анализируемых условиях – 8.9 млн м<sup>3</sup>/сут. В область при необходимости может доставляться СПГ плавучей регазификационной установкой "Маршал

| Субъект РФ                    | Диапазон<br>относительных<br>недоотпусков, % | Количество<br>влияющих КВО ЕСГ,<br>шт. |
|-------------------------------|--|--|
| Республика Карелия            | 10-43  | 17                                     |
| Республика Коми               | 38-40  | 19                                     |
| Архангельская область (с НАО) | 13-40  | 24                                     |
| Калининградская область       | 76-85  | 10                                     |
| Ленинградская область (с СПб) | 9-10   | 10                                     |
| Новгородская область          | 15-17  | 10                                     |
| Псковская область             | 27-97  | 17                                     |
| Вологодская область           | 21-58  | 8                                      |

**Таблица 2.** Относительные расчетные недоотпуски электроэнергии в регионах Северо-Западного федерального округа

| Субъект РФ                    | Относительный недоотпуск, % | Количество<br>влияющих КВО<br>ЕСГ, шт. |
|-------------------------------|-----------------------------|--|
| Республика Карелия            | 100                         | 10                                     |
| Республика Коми               | 100                         | 4                                      |
| Архангельская область (с НАО) | 100                         | 8                                      |
| Калининградская область       | 100                         | 10                                     |
| Ленинградская область (с СПб) | 100                         | 10                                     |
| Новгородская область          | 100                         | 10                                     |
| Псковская область             | 100                         | 10                                     |
| Вологодская область           | 100                         | 10                                     |

Таблица 3. Относительные расчетные недопоставки газа на прямое потребление по регионам Северо-Западного федерального округа

Таблица 4. Относительные расчетные недоотпуски тепловой энергии по регионам Северо-Западного федерального округа

| Субъект РФ                    | Относительный недоотпуск, % | Количество<br>влияющих КВО<br>ЕСГ, шт. |
|-------------------------------|-----------------------------|--|
| Республика Карелия            | 43                          | 1                                      |
| Республика Коми               | 45                          | 1                                      |
| Архангельская область (с НАО) | 35-37                       | 4                                      |
| Вологодская область           | 55                          | 1                                      |

Василевский" [11], но инфраструктура системы газоснабжения такова, что газ с этой установки подается непосредственно в ПХГ.

Приоритет в распределении поставленного природного газа со стороны производства тепловой энергии сформировал ситуацию полного прекращения подачи газа на его прямое потребление (в условиях отключения соответствующих КВО ЕСГ) в следующих субъектах, табл. 3.

Несмотря на приоритет, отданный производству тепловой энергии при дефиците газа в случаях отключений отдельных КВО, потребители нескольких субъектов будут испытывать проблемы с поставкой тепловой энергии, что видно из табл. 4.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в данной статье подход с использованием соответствующего инструментария позволяет анализировать возможности снабжения потребителей конечными видами энергии в условиях пикового возрастания спроса на тепловую энергию при похолоданиях на территориях федеральных округов при потере работоспособности отдельных КВО ЕСГ. Исследования показали, что особенно

уязвимыми к ограничениям работоспособности важнейших объектов газовой отрасли являются регионы со значительной долей доминирования природного газа, находящиеся на периферии газотранспортной сети. Этот факт необходимо принимать во внимание при планировании дальнейшего развития газификации российских регионов.

Статья подготовлена в рамках проектов государственного задания № FWEU-2021-0003 (рег. номер: AAAA-A21-121012090014-5) и № FWEU-2021-0001 Программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг. с использованием ресурсов ЦКП "Высокотемпературный контур" (Минобрнауки России, проект № 13. ЦКП.21.0038).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Сендеров С.М., Рабчук В.И., Еделев А.В. Особенности формирования перечня критически важных объектов газотранспортной сети России с учетом требований энергетической безопасности и возможные меры минимизации негативных последствий от чрезвычайных ситуаций на таких объектах // Изв. РАН. Энергетика, 2016. № 1. С. 70–78.
- 2. Senderov S.M, Edelev A.V. Formation of a list of critical facilities in the gas transportation system of Russia in terms of energy security // Energy, 2019. V. 184. P. 105–112.
- 3. Сендеров С.М., Смирнова Е.М., Воробьев С.В. Подходы к оценке уязвимости систем топливоснабжения газопотребляющих регионов России в условиях прекращения работы особо значимых объектов газовой отрасли // Изв. РАН. Энергетика, 2020. № 1. С. 82–91.
- Senderov S., Smirnova E., Vorobev S. Analysis of vulnerability of fuel supply systems in gasconsuming regions due to failure of critical gas industry facilities // Energy, 2020. V. 212. P. 118785.
- 5. Сендеров С.М., Крупенёв Д.С., Воробьев С.В., Береснева Н.М., Бояркин Д.А. Методический подход к оценке уровня значимости критически важных объектов энергетики при взаимосвязанной работе энергетических отраслей // Изв. РАН. Энергетика, 2023. № 2. С. 31–45.
- Климатические зоны России. URL: https://wearpro.ru/biblioteka/klimaticheskie-zony-rossii. html
- 7. Сендеров С.М., Воробьев С.В. Формирование перечней критически важных объектов газовой отрасли и их сочетаний с позиций энергетической безопасности страны // Известия РАН. Энергетика, 2019. № 1. С. 59–69.
- 8. *Senderov S.M., Vorobev S.V.* Approaches to the identification of critical facilities and critical combinations of facilities in the gas industry in terms of its operability // Reliability Engineering & System Safety, 2020. V. 203. P. 107046.
- 9. Сендеров С.М., Рабчук В.И., Пяткова Н.И. Методический подход для исследования надежности топливо- и энергоснабжения потребителей в условиях негативных возмущений в энергетике // Изв. РАН. Энергетика, 2022. № 3. С. 3–11.
- 10. *Еделев А.В., Сендеров С.М., Пяткова Н.И.* Применение геоинформационных технологий для исследования проблем энергетической безопасности // Проблемы управления, 2015. № 2. С. 68–74.
- 11. ПРГУ "Маршал Василевский" URL: https://flot.gazprom.ru/fleet/prgu-marshal-vasilevskij/

# Analysis of the Possibilities of Energy Supply to Consumers in Cold Conditions During Large-Scale Emergency Installations in the Gas Industry

#### S. M. Senderov<sup>\*</sup>, N. M. Beresneva

Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia

\*e-mail: ssm@isem.irk.ru

The article presents the main components of the methodological approach to the analysis of the possibilities of supplying final types of energy to consumers in the event of a loss of performance of critical facilities of the Russian gas industry in conditions of cooling in the territories of the federal districts. The principle of choosing a territorial section for analyzing the situation with a simultaneous increase in demand for fuel and energy resources is described. An algorithm for conducting research is given. Research is carried out by modeling the work of the country's fuel and energy complex during the period of the average day of January in the conditions of a peak-increasing demand for thermal energy in the territories of federal districts. At the same time, the cooling is modeled in turn for each of the federal districts in the zone of operation of the Unified Gas Supply System of Russia. An analysis of the possibilities of meeting the demand for final types of energy in the constituent entities of the Russian Federation is carried out for all key scenarios of cooling and loss of efficiency of critical gas industry facilities. The principles of modeling the situation with the supply of final types of energy to consumers in these situations are shown. The most vulnerable regions under the analyzed conditions are identified. The conclusion is made about the need for a balanced approach to determining the optimal degree of dominance of natural gas in the fuel and energy balance of the regions, taking into account the existing opportunities for its supply in the conditions of large-scale emergencies in the gas industry.

*Keywords*: critical facilities, reliability of fuel and power supply, gas industry, undersupply of electrical and thermal energy

УДК 621.311.1

## КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ЗОНЫ НАДЕЖНОСТИ ПРИ ОЦЕНКЕ БАЛАНСОВОЙ НАДЕЖНОСТИ. ЧАСТЬ 2

© 2024 г. Д. С. Крупенёв<sup>1, \*</sup>, Н. А. Беляев<sup>2, \*\*</sup>, Д. А. Бояркин<sup>1</sup>, Д. В. Якубовский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук,

Иркутск, Россия <sup>2</sup>Акционерное общество "НТЦ ЕЭС", Москва, Россия <sup>\*</sup>e-mail: krupenev@isem.irk.ru <sup>\*\*</sup>e-mail: belyaev.na@yandex.ru

> Поступила в редакцию 16.08.2023 г. После доработки 17.06.2024 г. Принята к публикации 22.06.2024 г.

В статье представлен анализ методов кластеризации применительно к задаче формирования энергетических расчетных моделей (ЭРМ) электроэнергетических систем. Рассмотрены классические методы кластеризации, такие как: метод k-средних, метод кратчайшего пути, а также методы обнаружения сообществ в графах по заданным признакам, которые являются наиболее подходящими для решения поставленной задачи. На основании проведенного анализа было выявлено, что для кластеризации графов максимально адекватный результат может быть получен при применении метода Лэйдена. В экспериментальной части статьи представлены результаты применения метода Лэйдена для формирования ЭРМ объединенной энергосистемы Сибири.

*Ключевые слова:* электроэнергетическая система, балансовая надежность, зона надежности, межзонная связь, энергетическая расчетная модель, методы обнаружения сообществ в графах, метод Лейдена

**DOI:** 10.31857/S0002331024020032

#### введение

Электроэнергетические системы (ЭЭС) представляют собой сложные структуры, в составе которых работают сотни тысяч различных элементов [1]. Для анализа балансовой надежности таких систем [2–4], как правило, используют методику на основании метода Монте-Карло [5], которая является наиболее вычислительно эффективной по сравнению с другими [6]. При оценке балансовой надежности из-за высокой размерности анализируемых ЭЭС и, в связи с этим возникающих вычислительных и аналитических трудностей, проводят кластеризацию ЭЭС на зоны надежности (3H) и формирование энергетических расчетных моделей (ЭРМ). В практике решения задач анализа систем разработаны различные методы кластеризации [7, 8], но для оценки балансовой надежности формализованных методик кластеризации не существует. При кластеризации для определенных частей ЭЭС исключаются сетевые ограничения, которые слабо влияют на показатели балансовой надежности. Формирование ЭРМ, как правило, проводится до оценки балансовой надежности, и сформированная ЭРМ принимается неизменной для всего периода оценки балансовой надежности, но при необходимости и вычислительной возможности кластеризация ЭЭС на зоны надежности может проводиться многократно в цикле оценки балансовой надежности. Основной причиной многократной кластеризации может быть существенные изменения параметров ЭЭС в течении расчетного периода и, соответственно, влияние этих параметров на возможности сети по передачи мощности. Также это может быть обусловлено тем, что современные ЭЭС имеют сложную структуру с большим разнообразием энергетического оборудования, к тому же ЭЭС имеют тенденцию к укрупнению и объединению, что еще больше усложняет структуру и неопределенность в возможных перетоках мощности.

В практике оценки балансовой надежности существуют различные подходы кластеризации ЭЭС. В основном они основаны либо на знаниях экспертов, либо на упрощенном анализе балансовой ситуации в ЭЭС. Целью этой статьи является представление методики кластеризации ЭЭС на ЗН, имеющей математическую формализацию. Содержательно решаемую задачу можно сформулировать следующим образом: для известной структуры ЭЭС, характеристик генерирующих мощностей и графиков потребления мощности, ограничений пропускной способности линий электропередачи и сечений электрической сети, организационно-экономических условий функционирования ЭЭС необходимо определить границы ЗН для формирования ЭРМ и дальнейшей оценки БН.

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ЭЭС И ФОРМИРОВАНИЕ ЭРМ НА ОСНОВАНИИ МЕТОДОВ ОБНАРУЖЕНИЯ СООБЩЕСТВ В ГРАФАХ

Для максимально эффективного (быстрого и точного) решения задачи кластеризации ЭЭС на ЗН и формирования ЭРМ необходимо разработать подход, который будет максимально полно отражать влияющие критерии и ограничения на уровень БН ЭЭС и позволит достаточно быстро и адаптивно проводить кластеризацию ЭЭС в процессе проведения исследований.

При формировании алгоритма кластеризации ЭЭС на зоны надежности необходимо получить функцию a:X-Z, которая каждый узел ЭЭС ( $x \in X$ ) включает в зону надежности  $z \to Z$ . В рассматриваемом случае множество Z, т.е. количество зон надежности, неопределенно. Оптимальное число зон надежности необходимо определить в процессе вычислений. Стоит отметить, что, как и в любом примере кластеризации, для решаемой задачи справедлива теорема невозможности Клейнберга, в которой указывается, что не существует оптимального алгоритма кластеризации. Каждый применяемый алгоритм будет вносить свою специфику в конечное решение. Это будет зависеть от выбранного критерия и метрики кластеризации.
Решением задачи кластеризации ЭЭС будет являться ее деление, удовлетворяющее заданному критерию оптимальности. В рассматриваемом случае критерием оптимальности выступает минимизация числа зон надежности:

$$Z \underset{\rho}{\rightarrow} \min. \tag{1}$$

Стремление к минимуму числа зон надежности является естественным, так как это в дальнейшем анализе балансовой надежности приведет к снижению размерности ЭРМ.

Ограничением при решении поставленной задачи будет выступать ограничение, заданное на метрику, которая формируется из различных признаков. В рассматриваемом случае метрика кластеризации должна включать как технические, так и экономические признаки. К техническим признакам можно отнести: установленную мощность генерирующего оборудования в узлах ЭЭС; среднее значение числа часов использования установленной мошности в узлах ЭЭС; сезонные максимумы и минимумы потребления мощности в узлах ЭЭС; аварийность энергетического оборудования; нормативы на проведение плановых ремонтов энергетического оборудования; длины линий электропередачи (ЛЭП) между узлами ЭЭС; пропускные способности ЛЭП [9]. К экономическим: стоимость ввода генерирующих и сетевых объектов. От выбора метрики в итоге будет зависеть результат кластеризации. Метрика должна максимально отражать специфику работы ЭЭС и влияние учитываемых признаков на кластеризацию. В качестве меры расстояния (степени похожести) может быть использована одна из следующих метрик – евклидово расстояние или его квадрат, манхэттенское расстояние, расстояние Чебышева, степенное расстояние и др.

## ОБЗОР АЛГОРИТМОВ КЛАСТЕРИЗАЦИИ СИСТЕМ

В настоящее время разработано достаточно большое количество алгоритмов кластеризации в наборах данных [10–12], каждый из которых обладает своей спецификой, имеет свои достоинства и недостатки. Особняком стоят методы и адаптации методов, позволяющие работать в сети взаимосвязанных элементов, другими словами — в графах. Наличие взаимосвязей между кластеризуемыми объектами значительно влияет на получаемый результат и накладывает определенные ограничения. Существует множество методов кластеризации на графах, которые могут быть использованы в рамках сетевого анализа. Некоторые из них являются модификациями стандартных методов кластеризации, таких как метод k-средних, спектральная кластеризация и имеют адаптации для работы с графами.

Классификация методов кластеризации может быть проведена на основании способа определения места разделения графа. Можно выделить следующие классы этих методов:

1. Методы на основе сходства. Эти методы определяют кластеры на основе степени сходства между вершинами графа. В таких методах могут использоваться различные метрики сходства, например, косинусное сходство или евклидово расстояние.

2. Методы на основе расстояния. Эти методы определяют кластеры на основе расстояния между вершинами графа. В таких методах могут использоваться

различные метрики расстояния, например, евклидово расстояние или расстояние Манхэттена.

3. Методы на основе модели. Эти методы определяют кластеры на основе вероятностной модели графа. Такие методы могут использоваться для кластеризации графов с большим количеством вершин и/или ребер.

4. Методы на основе графовой структуры. Эти методы определяют кластеры на основе структуры графа, такой как плотность графа, центральность вершин и т.д.

Каждый класс представленных выше методов имеет свои преимущества и недостатки, и выбор конкретного метода зависит от решаемой задачи и свойств графа, который необходимо кластеризовать.

Также классификацию методов кластеризации можно сделать на основании подходов, на которых построен алгоритм кластеризации. Некоторые из наиболее распространенных методов кластеризации на графах включают в себя:

1. Класс методов разбиения.

1.1. Метод k-средних (k-Means) [11] — это один из наиболее популярных методов кластеризации, принадлежащий к классу методов разбиения. Он основан на разделении вершин графа на заданное число кластеров, так чтобы минимизировать сумму квадратов расстояний между вершинами и центроидами кластеров. Метод k-средних можно применять, когда свойства вершин являются числовыми или когда можно преобразовать их в числовые.

1.2. Метод кратчайшего пути (Shortest Path Clustering) [12] — в этом методе кластеры строятся на основе расстояний между вершинами графа. Данный метод также относится к классу методов разбиения.

2. Методы иерархической кластеризации [13] – это класс методов, которые позволяют создавать иерархическую структуру кластеров. Представляет собой наиболее широкий класс методов. Эти методы могут быть использованы для кластеризации вершин графа на основе их свойств, иерархически объединяя близкие вершины. Общая идея методов данной группы заключается в последовательной иерархической декомпозиции множества объектов. В зависимости от направления построения иерархии различают дивизимный и агломеративный методы. В случае агломеративного метода (снизу вверх) процесс декомпозиции начитается с того, что каждый объект представляет собой самостоятельный кластер. Затем на каждой итерации пары близлежащих кластеров последовательно объединяются в общий кластер. Итерации продолжаются до тех пор, пока все объекты не будут объединены в один кластер или пока не выполнится некоторое условие остановки. Дивизимный метод (сверху вниз) напротив, подразумевает, что на начальном этапе все объекты объединены в единый кластер. На каждой итерации он разделяется на более мелкие до тех пор, пока каждый объект не окажется в отдельном кластере или не будет выполнено условие остановки. В качестве условия остановки можно использовать пороговое число кластеров, которое необходимо получить, однако обычно используется пороговое значение расстояния между кластерами. Рассмотрим некоторые из них.

2.1. Метод Лувена (Louvain Method) [14] — в этом методе вершины графа постепенно объединяются в кластеры, чтобы максимизировать внутрикластерную связность и минимизировать межкластерную связность.

2.2. Метод Spectral Clustering [15] — этот метод основан на анализе собственных значений матрицы смежности графа и позволяет разбивать граф на кластеры на основе его структурной информации.

2.3. Метод Edge Betweenness Clustering [16] – этот метод использует меру межкластерной связности (между центральными вершинами) для разделения графа на кластеры.

3. Методы кластеризации на основе плотности – это методы, которые основаны на анализе плотности распределения вершин графа в пространстве свойств. Они могут быть особенно полезны, если вершины графа не являются числовыми и не могут быть преобразованы в числа. Например, DBSCAN [17] – это метод кластеризации на основе плотности, который позволяет выделять кластеры на основе плотности вершин вокруг определенных центральных точек.

4. Также можно использовать сетевые методы анализа [18] для кластеризации на графах. Сетевые методы — это подход к анализу данных, основанный на представлении данных в виде сетей или графов, что имеет идентичную структуру. Общая идея методов заключается в том, что пространство объектов разбивается на конечное число ячеек, образующих сетевую структуру, в рамках которой выполняются все операции кластеризации. Главное достоинство методов этой группы в малом времени выполнения, которое обычно не зависит от количества объектов данных, а зависит только от количества ячеек в каждом измерении пространства.

4.1. Алгоритм CLIQUE [19], адаптированный под кластеризацию данных высокой размерности, является одним из классических сетевых алгоритмов. Метод основан на том предположении, что если в многомерном пространстве данных распределение объектов не равномерно — встречаются области плотности и разрежения, то проекция области плотности в подпространство с меньшей размерностью будет частью области плотности в этом подпространстве.

4.2. Метод Infomap [20]. Этот метод использует информационную теорию для определения наиболее вероятных сообществ в графе.

Отдельно остановимся на алгоритме на основе модулярности [21], в котором максимизируется разница между фактическим количеством ребер во множестве и ожидаемым количеством таких ребер; различные модификации и улучшения модулярности на основе эвристических методов: метод отжига [22], спектральные алгоритмы [15] и др. [23]. Одним из самых используемых алгоритмов обнаружения сообществ в графах является алгоритм Лувена [14]. Анализ проведенного анализа методов кластеризации выявлено, что для решаемой задачи, кластеризации ЭЭС на зоны надежности, наиболее подходящим является алгоритм Лейдена (Leiden) [24].

## КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ЭЭС НА ЗОНЫ НАДЕЖНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ЛЕЙДЕНА

Алгоритм Лейдена — это алгоритм обнаружения сообществ в больших сетях. Метод Лейдена является итеративным алгоритмом, который работает следующим образом (на рис. 1 показана визуализация работы алгоритма Лейдена):

Изначально каждый узел считается отдельным кластером.

Алгоритм последовательно объединяет близлежащие кластеры, итеративно оптимизируя функционал качества кластеризации.

Функционал качества кластеризации в методе Лейдена основан на распределении объектов между кластерами и показывает насколько хорошо объекты внутри кластера похожи друг на друга, а объекты из разных кластеров различны.

Для объединения кластеров в методе Лейдена используется так называемая "перемещающая модулярность" (modularity gain), которая показывает насколько улучшится качество кластеризации при объединении двух кластеров.

Объединение кластеров происходит до тех пор, пока дальнейшее объединение не приведет к ухудшению функционала качества кластеризации.

После того, как все кластеры объединены, результатом работы алгоритма является итоговое разбиение объектов на кластеры.

Метод Лейдена относится к категории жадных алгоритмов, так как он на каждом шаге выбирает локально оптимальное решение. Он также относительно быстрый и показывает хорошие результаты для кластеризации больших графов и сетей.

Говоря более формальным языком, алгоритм разделяет узлы на непересекающиеся кластеры, чтобы максимизировать показатель модулярности для каждого кластера. Модулярность количественно определяет качество назначения узлов кластерам, то есть насколько плотно связаны узлы в кластере по сравнению с тем, насколько они были бы связаны в случайной сети. Алгоритм Лейдена осуществляет иерархическую кластеризацию, жадно оптимизируя модулярность, и процесс повторяется в сжатом графе. Алгоритм Лейдена состоит из трех основных этапов.

1. Локальное перемещение узлов в кластеры, основанное на значении модулярности (метрики), которая определяется, как:



Рис. 1. Визуализация работы алгоритма Лейдена.

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{ij} \left( A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta(c_i, c_j),$$
<sup>(2)</sup>

где  $A_{ij}$  – вес ребра, образованный в соответствии с используемыми признаками;  $k_i$  и  $k_j$  – сумма весов ребер, присоединенных к узлам i и j; m – сумма всех весов ребер в графе;  $c_i$  и  $c_j$  – кластеры;  $\delta$  – дельта-функция Кронекера.

$$\delta(c_i, c_j) = \begin{cases} 1, c_i = c_j \\ 0, c_i \neq c_j \end{cases}.$$
(3)

Для определения модулярности кластера с применяется следующее выражение:

$$Q_c = \frac{\sum in}{2m} - \left(\frac{\sum tot}{2m}\right)^2,\tag{4}$$

где  $\sum in$  — это сумма весов ребер между узлами внутри кластера *c* (каждое ребро учитывается дважды);  $\sum tot$  — сумма всех весов ребер для узлов внутри кластера.

В итерационном процессе происходит перемещение узлов из одного кластера в другой. Для каждого варианта перемещения рассчитывается разница модулярностей  $\Delta Q$ :

$$\Delta Q = \left(\frac{\sum in + 2k_{i,in}}{2m} - \frac{\sum tot + k_i}{2m}\right)^2 - \left(\frac{\sum in}{2m} - \left(\frac{\sum tot}{2m}\right)^2 - \frac{k_i}{2m}\right)^2.$$
 (5)

На основании наилучшего результата соответствующий узел закрепляется за соответствующим кластером.

2. Уточнение кластеров, а именно идентификация кластеров, предложенных на первом этапе. Кластеры, предложенные на первом этапе, могут разделяться на несколько кластеров. Фаза уточнения не следует жадному подходу и может объединить узел со случайно выбранным кластером, что увеличивает функцию качества (модулярности). Эта случайность позволяет более широко раскрыть пространство кластера.

3. Агрегация и повторение этапов 1 и 2 до тех пор, пока качество перемещения и объединения узлов нельзя будет повысить.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Для оценки работы алгоритма Лэйдена были выполнены экспериментальные исследования на тестовой схеме Объединенной энергосистемы (ОЭС) Сибири, которая включает в себя Алтайскую, Бурятскую, Иркутскую, Красноярскую, Кузбасскую, Новосибирскую, Омскую, Томскую, Хакасскую и Забайкальскую энергосистемы. Для последующей кластеризации ОЭС Сибири была представлена в виде неориентированного графа, в котором каждая из вершин характеризуются длиной и напряжением. Исходные данные для кластеризации ОЭС Сибири были приняты в соответствии [25]. Стоит отметить, что исходная схема ОЭС Сибири при кластеризации состояла из 540 генерирующих и нагрузочных узлов и 1025 линий электропередачи.

На рис. 2 показан результат работы метода (алгоритма) кластеризации Лэйдена в виде графического представления разделения узлов ОЭС Сибири по зонам надежности.



**Рис. 2.** Графическое представление отнесения узлов ОЭС Сибири к зонам надежности на основании применения алгоритма Лейдена.

Та же кластеризация, но уже в границах географических регионов представлена на рис. 3.

В результате выполнения кластеризации методом Лейдена было получено 14 зон надежности. Время, затраченное на кластеризацию, составило 1.16 с, что является достаточным для проведения кластеризации в процессе оценки балансовой надежности при соответственной подготовительной работе с исходными данными.

Анализ полученных кластеров показывает, что алгоритм выполнил кластеризацию по наиболее узким местам ЭЭС с точки зрения плотности взаимосвязей и их качества. Поэтому полученные зоны надежности получились максимально независимыми с наименьшим количеством связей между друг другом. Такое деление при последующей оценки балансовой надежности будет хорошо определять загруженность связей, которые уже на этапе кластеризации были определены как узкие места, требующие более детального рассмотрения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном исследовании рассмотрена задача формирования энергетических расчетных моделей, которые используются при оценке балансовой надежности электроэнергетических систем. Был проведен анализ методов кластеризации на графах и определено, что одним из наиболее подходящих способов кластеризации ЭЭС на зоны надежности является алгоритм Лейдена.



**Рис. 3.** Результат кластеризации ОЭС Сибири на ЗН на основании применения алгоритма Лейдена (географическая привязка).

По результатам выполненных экспериментальных расчетов можно отметить, что в сравнении с известными инженерными подходами к формированию энергетических расчетных моделей [26] предложенный подход дает близкий результат. На рис. 3 видно, что по результатам формирования зон надежности оказались учтены все основные ограничения на передачу мощности в ОЭС Сибири. Границы сформированных зон надежности коррелируют с соответствующими контролируемыми сечениями в электрической сети, несмотря на то что контролируемые сечения никак не учитывались в предложенном подходе.

Таким образом можно заключить, что с помощью алгоритма Лейдена становится возможным формализованное определение зон надежности непосредственно в циклах выполнения соответствующих расчетов, что позволяет оптимизировать решение задач анализа и синтеза балансовой надежности.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01090.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Руденко Ю.Н., Чельцов М.Б.* Надежность и резервирование в электроэнергетических системах. Изд.-во "Наука" Сибирское отделение, Новосибирск. 1974. 262 с.
- 2. *Ковалев Г.Ф., Крупенев Д.С., Лебедева Л.М.* Системная надежность ЕЭС России на уровне 2030 г. Электрические станции, 2011. № 2. С. 44–47.
- 3. Probabilistic Adequacy and Measures. Technical Reference Report Final, NERC, July, 2018.
- 4. 2021 Long-Term Reliability Assessment. NERC, 2021. P. 126.
- 5. *Ковалев Г.Ф., Лебедева Л.М.* Надежность систем электроэнергетики. Новосибирск: Наука. 2015.
- 6. *Krupenev D., Boyarkin D., Iakubovskii D.* Improvement in the computational efficiency of a technique for assessing the reliability of electric power systems based on the Monte Carlo method. Reliability Engineering & System Safety. № 204.

https://doi:10.1016/j.ress.2020.107171

- 7. Rouhani M., Mohammadi M., Aiello M. Soft clustering based probabilistic power flow with correlated inter temporal events // Electric Power Systems Research. № 204. 2022. 107677. https://doi.org/10.1016/j.epsr.2021.107677.
- 8. Gheorghe G., Scarlatache F., Neagu B. Clustering in Power Systems. Applications. 2016.
- Справочник по проектированию электрических сетей / под ред. Д.Л. Файбисовича Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2012. 376 с.
- 10. Мандель И.Д. Кластерный анализ. М.: Финансы и статистика. 1988. 176 с.
- MacQueen J. Some methods for classification and analysis of multivariate observations/ J. MacQueen // In Proc. 5th Berkeley Symp. On Math. Statistics and Probability, 1967. C. 281–297.
- 12. Sarkar A., Ramalingam S. Graph Clustering: A Review. 2020.
- 13. *Kaufman L., Rousseeuw P.J.* (1990). Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis (1 ed.). New York: John Wiley. ISBN 0-471-87876-6.
- Blondel V.D., Guillaume J.-L., Lambiotte R. & Lefebvre E. Fast unfolding of communities in large networks. J. Stat. Mech. Theory Exp. 10008. 6. https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/10/P10008 (2008).
- 15. *Newman M. E. J.* and *M. Girvan*. Finding and evaluating community structure in networks. Phys. Rev. E 69. 026113. 2004.
- Ester M., Kriegel H.P., Sander J. and Xu X. A Density-Based Algorithm for Discovering Clusters in Large Spatial Databases with Noise. In: Proceedings of the 2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, Portland, OR, AAAI Press. 1996. P. 226–231.
- Emmons S., Kobourov S., Gallant M., Börner K. (2016) Analysis of Network Clustering Algorithms and Cluster Quality Metrics at Scale. PLoS ONE 11(7): e0159161. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0159161
- 18. Beligianni F., Tsatsaronis G., Palpanas T. A Survey on Clustering Techniques for Graph Structured Data. 2019.
- Palla G., Derényi I., Farkas I. et al. Uncovering the overlapping community structure of complex networks in nature and society. Nature 435, 2005. P. 814–818. https://doi.org/10.1038/nature03607
- 20. *Rosvall M., Bergstrom C.T.* Maps of information flow reveal community structure in complex networks. PNAS. 105. 1118. 2008.
- 21. *Орлов А.О., Чеповский А.А.* О свойствах модулярности и актуальных корректировках алгоритма Блонделя // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. № 3.
- Metropolis N., Rosenbluth A.W., Rosenbluth M.N., Teller A.H., and Teller E. Equation of State Calculations by Fast Computer Machines // J. Chemical Physics. 21. 6. June. 1953. P. 1087–1092.
- 23. *Lancichinetti A., Fortunato S.* Community detection algorithms: A comparative analysis. Phys. Rev. E 80, 056117.

https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.056117 (2009).

 Traag V.A., Waltman L., van Eck N.J. From Louvain to Leiden: guaranteeing well-connected communities. Sci Rep 9. 5233. 2019. https://doi.org/10.1038/s41598-019-41695-z

- 25. Приказ Минэнерго России от 28.02.2022 №146 "Об утверждении схемы и программы развития Единой энергетической системы России на 2022–2028 годы".
- 26. *Крупенев Д.С., Беляев Н.А., Бояркин Д.А.* Кластеризация электроэнергетических систем на зоны надежности при оценке балансовой надежности. Часть 1 // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2024. № 1. С. 12–21.

## Clustering of Electric Power Systems into Reliability Zones in Adequacy Assessment. Part 2

D. S. Krupenev<sup>1, \*</sup>, N. A. Belyaev<sup>2, \*\*</sup>, D. A. Boyarkin<sup>1</sup>, D. V. Iakubovskii<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia <sup>2</sup>Department for Electricity and Power, JSC "STC UPS", Moscow, Russia <sup>\*</sup>e-mail: krupenev@isem.irk.ru <sup>\*\*</sup>e-mail: belvaev.na@vandex.ru

The article presents an analysis of clustering methods in relation to the problem of the formation of energy calculation models (ECM) of electric power systems (EPS). Classical clustering methods are considered, such as: the k-means method, the shortest path method, as well as methods for detecting communities in graphs according to given features, which are the most suitable for solving the problem. Based on the analysis, it was found that for graph clustering, the most adequate result can be obtained by applying the Leiden method. The experimental part of the article presents the results of applying the Leiden method for the formation of the ECM of the unified energy system of Siberia.

*Keywords:* electric power system, adequacy, reliability zone, interband communication, energy calculation model, methods for detecting communities in graphs, Leiden method

УДК 621.039

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАТРАТ НА РАСЧЕТ РАДИОАКТИВНОГО ВЫБРОСА ПРИ ТЯЖЕЛОЙ АВАРИИ НА АЭС С ВВЭР В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

© 2024 г. М. Ф. Филиппов, М. И. Делова<sup>\*</sup>, К. С. Долганов, А.Е. Киселев, С. Н. Красноперов, В. Н. Семенов, Д. Ю. Томащик

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия <sup>\*</sup>e-mail: delovami@ibrae.ac.ru

> Поступила в редакцию 02.06.2024 г. После доработки 17.06.2024 г. Принята к публикации 22.06.2024 г.

Исследуются вычислительные затраты на расчет радиоактивного выброса при тяжелой аварии на АЭС с ВВЭР в зависимости от используемых физических моделей в составе расчетных средств, подобных тяжелоаварийному коду COKPAT/B3. Данный анализ позволяет определить наиболее затратные с точки зрения процессорного времени модели, упрощение которых обеспечивает наименьшие затраты времени на вычисления. Актуальность работы обусловлена потребностью в разработке новых или адаптации существующих расчетных инструментов оценки радиоактивного выброса для задач аварийной готовности и реагирования с учетом специфики требований к точности расчетных оценок и времени на их получение. В статье продемонстрирована возможность снижения вычислительных затрат без существенной потери точности расчетных оценок выброса путем упрощения модели размерного спектра аэрозолей. Работоспособность предложенного подхода продемонстрирована на примере результатов моделирования эксперимента Phebus FPT1.

*Ключевые слова:* АЭС, тяжелые аварии, моделирование, аварийное реагирование

DOI: 10.31857/S0002331024020046

### введение

Тяжелые аварии на Чернобыльской АЭС и АЭС "Фукусима-1" показали, что подобные чрезвычайные ситуации приводят к масштабным социально-экономическим последствиям и протекают по сценариям, которые отличаются от сценариев, рассматривавшихся в рамках обоснований безопасности этих и структурно-подобных проектов. При возникновении подобных аварий для поддержки принятия решений по защите населения необходимо получать прогнозы развития аварии и возможных последствий быстрее реального времени. Этим обусловлена потребность в разработке соответствующих расчетных инструментов.

В настоящее время уже существует несколько методов и построенных на их основе средств оперативного анализа аварийных ситуаций на АЭС, предназначенных для решения комплекса задач — оценки состояния барьеров безопасности, определения вероятного аварийного сценария, оценки величины выбросов в окружающую среду. К наиболее оперативным можно отнести методы, основанные на использовании заранее полученных результатов расчетов совместно с подбором аварийной последовательности по наблюдаемым данным. В качестве примеров практической реализации такого подхода можно привести расчетно-аналитический код FaSTPro (Fast Source Term Prognosis [1]) и код RASTEP (RApid Source TErm Prediction) [2]. Но платой за малые затраты времени на получение расчетных оценок является потеря возможности учесть отклонения реального сценария аварии от постулируемых в рамках предварительных расчетов. Кроме того, заранее подготовленные результаты исключают сценарии с очень малой вероятностью, в которые могут попадать и сценарии с наихудшими последствиями.

В качестве аналогичных предыдущим можно рассматривать методы, предполагающие использование заранее рассчитанных источников радиоактивных выбросов или в качестве первичного предварительного прогноза (который может впоследствии уточняться расчетными оценками по актуализированными данным), или в качестве основы для упрощенных корреляционных моделей. В частности, в модуле оценки параметров выброса системы RASCAL 4 [3] выброс оценивается путем решения системы балансных уравнений, описывающих изменение активности отдельных изотопов в структурных элементах АЭС. При этом величины коэффициентов в этих уравнениях определяются на основе полученных ранее в ходе прецизионных расчетов корреляций или на основе измерений, непосредственно проводимых на аварийном блоке. Примером практической реализации такого подхода может служить система ASTRID [4]. В рамках данной системы предполагалось в качестве предварительных оценок использовать заранее полученные по прецизионному коду системы ASTRID результаты моделирования аварии, что позволяло согласовать их с последующими оценками. Для уточняющих оценок предполагается использовать ряд упрощений (к примеру, применение фиксированной нодализационной схемы контуров реакторной установки (РУ)), позволяющих, с одной стороны, обеспечить сравнительно низкие затраты времени на вычисления, с другой – сужающих область применения ASTRID как в части перечня рассматриваемых установок, так и в части перечня моделируемых аварийных сценариев.

Описанные выше подходы к решению задач оценки выбросов в той или иной степени предполагают использование заранее полученных оценок, что ограничивает область их применения в части перечня сценариев развития аварии. Подобного недостатка лишены детерминистические подходы, основанные на моделировании широкого спектра физических процессов и явлений, определяющих протекание тяжелых аварий. Данные методы и программные модули на их основе позволяют моделировать тяжелые аварии для широкого спектра исходных событий и эксплуатационных состояний АЭС. С другой стороны, непосредственное применение тех же детерминистических методов моделирования, что и при расчетах запроектных аварий в рамках обоснования безопасности АЭС, не позволяет обеспечить необходимое для задач аварийного реагирования быстродействие в получении прогнозов, которое обеспечивают упрощенные подходы. Возможным решением проблемы создания быстродействующих расчетных средств, основанных на детерминистическом подходе, может стать ограниченное упрощение существующих детерминистических методов моделирования, применяемых для обоснования безопасности АЭС, в части наиболее ресурсоемких моделей. Это может позволить, с одной стороны, существенно снизить время расчета источника выброса, с другой — обеспечить сохранение точности расчетных оценок и универсальности в рамках приемых границ.

Подобный подход требует проведения аналитического исследования изменения затрат времени на численное моделирование тяжелой аварии в зависимости от используемых моделей или групп моделей, а также определения возможных путей их упрощения.

## МЕТОД ПРОВЕДЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

В общем случае время получения расчетных оценок последствий тяжелой аварии с помощью современного интегрального кода может зависеть от значительного количества факторов. Но к основным можно отнести следующие:

1) набор моделируемых физических процессов и явлений (определяющий во многом количество решаемых численно уравнений);

2) значения параметров отдельных моделей, влияющих на величину временного шага или на сходимость решения;

3) число расчетных ячеек в моделях контурной гидравлики и защитной оболочки (30);

4) оптимальность расчетных алгоритмов и программной реализации;

5) характеристики используемого программного компилятора и ЭВМ.

Повышение быстродействия кодов за счет двух последних факторов относится в большей степени к техническим проблемам, потому в рамках данного анализа они не рассматривались. То же можно сказать и об оптимизации параметров нодализационной схемы. Наибольший же интерес при анализе возможности ускорения расчетного инструмента представляет влияние состава перечня моделируемых физических явлений и параметров соответствующих моделей на затраты процессорного времени для проведения одного расчета, а также на точность расчетных оценок.

В рамках такого исследования удобно разделить аварийный сценарий на феноменологические стадии, для каждой из которых характерны свои процессы и явления, определяющие их протекание. Для значительной части сценариев тяжелых аварий подобное разделение может иметь следующий вид:

1) потеря охлаждения активной зоны (а.з.);

2) отказ оболочек твэлов, начало поступления радиоактивных веществ (PB) из топлива в контур теплоносителя;

3) потеря стержневой геометрии а.з.;

4) перемещение расплава элементов а.з. и ВКУ, приводящее в итоге к отказу корпуса реактора;

5) отказ 3О, начало основного выброса.

Предложенное разделение основано на различиях в наборе физических процессов и явлений, играющих ключевую роль с точки зрения развития аварии на каждой из стадий. На первой стадии основными физическими процессами, определяющими ее протекание, являются теплогидравлические процессы в контурах и под 30. Следующая стадия характеризуется расширением перечня наиболее значимых процессов – на ход аварии (в частности, на повреждение элементов а.з.) дополнительно оказывают влияние физико-химические (в частности, окисление оболочек твэлов водяным паром) и механические (разрыв оболочек твэлов) процессы. На этой же стадии возникает источник РВ в первом контуре вследствие их выхода из негерметичных твэлов и начинается перенос аэрозольных и парообразных форм РВ по контуру. При дальнейшем развитии повреждения а.з. данная стадия сменяется расплавлением элементов а.з., выходом расплава на днище корпуса реактора и возможным проплавлением корпуса. Эти стадии развития аварии можно рассматривать как наиболее сложные с точки зрения моделирования одновременно протекающих физических процессов и явлений. Следующая стадия (от отказа корпуса реактора до отказа 30) определяется главным образом теплогидравлическими процессами и переносом РВ в контуре и в помещениях ЗО, и, кроме того, процессами в ловушке расплава или в бетонной шахте.

Для количественного анализа быстродействия расчетных средств при моделировании тяжелых аварий в качестве меры затрат времени на вычисления  $\psi$  можно использовать отношение временных затрат  $\tau_{CPU}$ , требуемого ЭВМ для проведения расчетов в рамках моделирования временного интервала от исходного события аварии до начала основного выброса к величине данного интервала  $\tau_{calc}$ :

$$\Psi = \frac{\tau_{CPU}}{\tau_{calc}}.$$
 (1)

Важно отметить, что ψ характеризует результирующее быстродействие при моделировании всех пяти стадий аварии. Для учета же вклада в результирующие затраты времени на вычисления для каждой из стадий в отдельности ψ можно записать в виде:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N_{phase}} \Psi_{CPU}^{phase,i} \left( \frac{\tau_{calc}^{phase,i}}{\tau_{calc}} \right), \tag{2}$$

где  $\tau_{calc}^{phase,i}$  — время длительности і-ой стадии аварии;  $\psi_{CPU}^{phase,i}$  — относительные затраты времени на вычисления для і-ой стадии. Соответственно выражение для относительного вклада каждой стадии в величину  $\psi$  будет иметь вид:

$$\beta_{phase}^{i} = \frac{\Psi_{CPU}^{phase,i}}{\Psi} \left( \frac{\tau_{calc}^{phase,i}}{\tau_{calc}} \right).$$
(3)

В общем случае величины  $\tau_{calc}^{phase,i}$ ,  $\psi_{CPU}^{phase,i}$ ;  $\psi$  и  $\tau_{calc}$  могут существенно зависеть от рассматриваемого аварийного сценария и применяемого для моделирования интегрального кода. Но в то же время соотношения между средними для нескольких сценариев значениями данных величин могут позволить сделать качественные выводы о значимости скорости расчета отдельных стадий аварии с точки зрения результирующего времени, требуемого для получения расчетных оценок выброса.

В рамках текущего исследования для получения подобных оценок использовался разработанный в ИБРАЭ РАН интегральный код СОКРАТ/ВЗ [5]. Данный код предназначен как для расчета времени начала, продолжительности и радионуклидного состава выброса в окружающую среду, так и для анализа процессов в реакторной установке и состояния атмосферы под защитной оболочкой при аварии на АЭС с реакторами ВВЭР. Применение СОКРАТ/ВЗ для решения поставленной исследовательской задачи обусловлено присутствием в его составе, как и в зарубежных аналогах, моделей основных физических процессов, определяющих развитие аварии. В частности:

1) модели контурной двухфазной многокомпонентной теплогидравлики первого и второго контуров РУ;

2) точечной модели теплогидравлических процессов под защитной оболочкой РУ;

3) модели окисления и разрушения активной зоны и внутрикорпусных устройств;

4) модели формирования расплава в напорной камере реактора и разрушения корпуса реактора;

5) модели взаимодействие расплава с бетоном шахты реактора;

6) модели накопления РВ в топливе;

7) модели выхода РВ из твэлов в первый контур;

8) модели выхода РВ из расплава (в корпусе реактора и в бетонной шахте);

9) модели переноса и осаждения PB в первом контуре PУ; модели переноса и осаждения радиоактивных веществ под 30.

Важно отметить, что имевшие место запроектные аварии на  $A \ni C$  – уникальные события, произошедшие по разным причинам на реакторных установках разного типа и разного времени проектирования, по которым затруднительно сделать обобщенные оценки. В связи с этим в рамках аналитического исследования использовались результаты моделирования вероятных гипотетических сценариев тяжелых аварий на отечественных АЭС с ВВЭР-1000 (без учета аварийных сценариев, связанных с бассейном вылержки). В частности, в рамках анализа использовались результаты моделирования 32 аварийных сценариев с различными исходными событиями (полное обесточивание, течи из первого контура под 30 и с байпасированием 30, межконтурные течи, при этом так же постулировались дополнительные отказы оборудования) и в различных эксплуатационных состояниях блока (работа на мощности, расхолаживание через второй контура, режим перегрузки активной зоны, разогрев первого контура до "горячего" состояния). При этом приоритет отдавался в первую очерель сценариям, предполагающим начало основного выброса более чем через сутки после наступления исходного события. Подобные сценарии, с одной стороны, требуют наиболее длительных вычислений для оценки их последствий. Соответственно, проблема повышения быстродействия расчетного средства для задач оценки их последствий стоит наиболее остро. С другой стороны, для "быстрых" сценариев аварий, характерное время развития которых сопоставимо с временными затратами на организацию аварийного реагирования и информационный обмен, задача проведения численной оценки возможного выброса может быть не актуальной (по причине начала основного выброса еще до момента передачи информации о наступлении аварийного события в кризисный центр и запуска расчетов).

### РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Результаты анализа расчетов аварий, проведенных с помощью кода СОКРАТ/В3, показали следующие закономерности:

1) для длительности основных стадий аварий характерен значительный разброс (от 0.01 ч до сотен часов). В то же время для большинства сценариев, в которых отказ изолирующей арматуры 30 не постулировался, время до начала основного выброса во многом определялось длительностью стадии удержанием PB под 30 (табл. 1). Наименее длительными в большинстве сценариев оказались стадии, связанные с плавлением а.з. и удержанием расплава в корпусе;

2) наименьшие значения  $\psi_{CPU}^{phase,i}$  характерны для стадии деградации а.з. и удержания расплава в корпусе реактора (табл. 2). Данный результат объясняется тем, что моделирование этих стадий требует учета мультифизичных процессов и явлений и сложно организованно с точки зрения численных методов (требует уменьшения временного шага, внутренних итераций при наиболее значительном количестве решаемых уравнений). Наибольшая же скорость счета в большинстве сценариев наблюдалась при моделировании стадии удержания PB под 3O;

3) сравнение величин  $\beta^i_{phase}$  показало, что, несмотря на высокую скорость расчета, из-за большой длительности стадия удержания РВ под ЗО вносит определяющий вклад во временные затраты для расчета всего аварийного сценария (табл. 3).

Важно отметить, что последняя закономерность справедлива только для сценариев, предполагающих возникновение основного выброса PB только после отказа 30. В случаях же постулирования отказа изолирующей арматуры 30 или возникновения условий для байпасирования 30 основные временные затраты могут приходиться как на стадию плавления а.з. и удержания расплава в корпусе реактора, так и на стадию, предшествующую началу разогрева а.з. (табл. 4).

Для стадии аварии, связанной с длительным удержанием PB под 3O и, как правило, вносящей основной вклад во временные затраты на расчет выброса, определяющими ее развитие группами физических процессов являются теплогидравлические процессы, перенос и осаждение аэрозолей PB и взаимодействие расплава топлива с материалом бетонной шахты. Анализируя затраты процессорного времени на моделирование каждой из этих групп физических процессов на примере отдельного аварийного сценария, можно отметить существенное влияние переноса PB, обусловленное во многом затратами процессорного времени на моделирование процессов коагуляции и переноса полидисперсных аэрозолей (табл. 5). В частности, на стадии удержания PB под 3O затраты процессорного времени на моделирование переноса, осаждения и коагуляции полидисперсных аэрозолей сопоставимы с затратами на моделирование теплогидравлических процессов в контурах РУ и в 3O.

## ПОВЫШЕНИЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ЗА СЧЕТ УПРОЩЕНИЯ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА И ПОВЕДЕНИЯ АЭРОЗОЛЕЙ

Выявленное влияние модели транспорта полидисперсных аэрозолей на временные затраты, необходимые для расчета источника выброса, можно объяснить соотношением между количеством решаемых уравнений в модели переноса PB и в теплогидравлической модели. В каждой пространственной ячейке модели контуров РУ и в помещении под ЗО на каждом временном шаге решается 6–10 уравнений теплогидравлической модели. При этом в рамках моделирования переноса PB решается 30–40 уравнений переноса химических соединений PB и сопоставимое количество уравнений переноса размерных групп аэрозолей, а также уравнений коагуляционной задачи.

| Наименование<br>стадии              | Минимальная<br>длительность, ч | Максимальная<br>длительность, ч | Средняя<br>длительность, ч |
|-------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| Потеря охлаждения                   | 0.01                           | 64.5                            | 19.0                       |
| Отказ оболочек, начало<br>выхода ПД | 0.04                           | 10.9                            | 1.5                        |
| Потеря стержневой<br>геометрии      | 0.3                            | 9.5                             | 2.9                        |
| Отказ корпуса РУ                    | 0.8                            | 126.0                           | 10.3                       |
| Начало основного выброса            | 0.3                            | 211.2                           | 82.6                       |

#### Таблица 1. Длительности стадий аварии

**Таблица 2.** Значения  $\psi_{CPU}^{phase,i}$  для основных стадий аварии

| Наименование<br>стадии              | Минимальное<br>значение | Максимальное<br>значение | Среднее<br>значение |
|-------------------------------------|-------------------------|--------------------------|---------------------|
| Потеря охлаждения                   | 0.06                    | 2.41                     | 0.87                |
| Отказ оболочек, начало<br>выхода ПД | 0.06                    | 1.90                     | 0.74                |
| Потеря стержневой<br>геометрии      | 0.06                    | 3.56                     | 1.53                |
| Отказ корпуса РУ                    | 0.04                    | 6.69                     | 1.46                |
| Начало основного выброса            | 0.08                    | 1.49                     | 0.55                |

Таблица 3. Относительный вклад каждого процесса в относительные затраты времени на расчет аварии

| Наименование<br>стадии              | Минимальное<br>значение, % | Максимальное значение, % | Среднее<br>значение, % |
|-------------------------------------|----------------------------|--------------------------|------------------------|
| Потеря охлаждения                   | 0.03                       | 92.06                    | 23.57                  |
| Отказ оболочек, начало<br>выхода ПД | 0.14                       | 10.26                    | 1.56                   |
| Потеря стержневой<br>геометрии      | 0.95                       | 22.66                    | 6.51                   |
| Отказ корпуса РУ                    | 1.45                       | 59.61                    | 11.03                  |
| Начало основного выброса            | 0.38                       | 93.78                    | 57.33                  |

Подобное соотношение числа решаемых уравнений во многом определяется степенью дискретизации размерного ряда аэрозолей на отдельные размерные группы. Важно отметить, что предпочтительное число размерных групп не является величиной, строго обусловленной видом уравнений транспорта и коагуляции, как и допущениями соответствующих моделей. На практике оно определяется эмпирически, в ходе валидации модели, на основе критерия наилучшего совпадения результатов расчетов с экспериментальными данными, причем как для интегральных

| Наименование<br>стадии              | Минимальное<br>значение, % | Максимальное<br>значение, % | Среднее<br>значение, % |
|-------------------------------------|----------------------------|-----------------------------|------------------------|
| Потеря охлаждения                   | 1.36                       | 71.46                       | 29.70                  |
| Отказ оболочек, начало<br>выхода ПД | 0.69                       | 1.92                        | 10.26                  |
| Потеря стержневой<br>геометрии      | 7.32                       | 10.96                       | 17.76                  |
| Отказ корпуса РУ                    | 3.23                       | 15.22                       | 39.77                  |
| Начало основного выброса            | 0.44                       | 87.40                       | 2.52                   |

Таблица 4. Относительный вклад каждого процесса в относительные затраты времени на расчет аварии (отдельные сценарии)

#### Таблица 5. Затраты процессорного времени для отдельных сценариев

| Сценарий: течь Ду50 из холодной нитки ГЦТ с отказом активной части САОЗ и спринклерной системы |                              |   |  |
|--|------------------------------|---|--|
| Наименование<br>стадии   | Не учитывается<br>перенос РВ | Учитывается<br>перенос РВ<br>(без коагуляции и<br>полидисперсного<br>приближения под<br>ЗО) | Учитывается<br>перенос РВ<br>(с коагуляцией и<br>полидисперсным<br>приближением<br>под ЗО) |
| Потеря охлаждения  | 1287                         | 1406  | 1406   |
| Отказ оболочек, начало<br>выхода ПД  | 106                          | 117   | 117  |
| Потеря стержневой<br>геометрии   | 674                          | 779   | 829  |
| Отказ корпуса РУ   | 9311                         | 14472   | 18988  |
| Начало основного<br>выброса  | 105387                       | 152251  | 196416   |

экспериментов, так для и экспериментов по отдельным явлениям (включая эксперименты по исследованию турбулентной коагуляции). Соответственно, оно может существенно варьироваться. В частности, для кода СОКРАТ/ВЗ [5] в качестве рекомендованного значения используется 21 размерная группа. Для аналогичных моделей других кодов могут использоваться иные значения данного параметра (в частности, для MELCOR 1.8.5–10 [6], для кода ASTEC – 50 [7]).

Соответственно, в качестве возможного пути к повышению быстродействия расчета выброса при умеренном снижении точности можно рассматривать возможность уменьшения числа размерных групп аэрозолей. Подобная мера может заметно снизить точность моделирования отдельных процессов, но при этом не привести к заметному снижению точности расчета выброса относительно точности с использованием неизмененных моделей.

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЧИСЛА РАЗМЕРНЫХ ГРУПП НА ТОЧНОСТЬ ОЦЕНОК ВЫБРОСА ИЗ-ПОД ЗО

Возможность или невозможность упрощения описания размерного спектра в модели переноса аэрозолей под 3О во многом будут определяться его влиянием на точность расчетных оценок выброса. Для анализа подобного влияния с помощью кода СОКРАТ/ВЗ была проведена серия расчетов интегрального эксперимента Phebus FPT1 [8], воспроизводящего основные стадии развития тяжелой аварии, включая удержание PB под 3О. Расчеты проводились с различным числом размерных групп аэрозолей.

В эксперименте использована модель реактора PWR мощностью 900 MBт (эл.) [9], построенная в масштабе 1/5000 в части первого контура и защитной оболочки. Компоненты экспериментальной сборки имитировали основные конструкции реакторной установки PWR. Моделировались следующие составляющие энергоблока: активная зона, горячая нитка первого контура, U-образная трубка парогенератора, холодная нитка первого контура и 30. Схематическое изображение установки Phebus FPT1 показано на рис. 1.

Перед началом основной стадии эксперимента топливная сборка дооблучалась тепловыми нейтронами в реакторе Phebus в течение ~7 суток при средней тепловой мощности ~205 кВт. Это выполнялось с целью генерации и накопления в топливе короткоживущих PB. В рамках эксперимента осуществлялся радиационный нагрев сборки, вызвавший ее разрушение с последующим выбросом PB в модельный контур, а в последствии – в модель 30. После этого в ходе эксперимента осуществлялась



Рис. 1. Схематичное изображение установки Phebus.



Рис. 2. Температура топлива на уровне 400 мм в эксперименте Phebus FPT1.

выдержка поступивших в модель 3О аэрозольных частиц, моделирующая стадию удержания РВ под 3О до ее отказа.

В рамках расчета эксперимента моделируются процессы в основных элементах установки: в рабочем участке установки (начиная с высотной отметки –0.1 м), в горячей нитке ГЦТ, парогенераторе, холодной нитке ГЦТ и ЗО. Энерговыделение в сборке и расход водяного пара через сборку задавались в соответствии с экспериментальными зависимостями.

Начальное накопление PB в топливе рассчитывалось кодом COKPAT/ B3. При расчете накопления ПД учитывались распад продуктов деления во время девятилетнего периода выдержки после выгрузки облученного топлива из реактора BR3, накопление продуктов деления во время семисуточного повторного облучения в реакторе Phebus, а также пятичасовой переходный процесс эксперимента Phebus FPT1. При этом предполагалось, что предварительное облучение топлива происходило со средней удельной мощностью 20.45 кBт/кгU до достижения среднего выгорания 23.4 ГВт\*сут/тU.

Результаты моделирования эксперимента при помощи COKPAT/B3 продемонстрировали корректное воспроизведение фаз разогрева (с 0 до 8000 с), окисления (10000–11600 с) и плавления модельной сборки (11000–17000 с), включая стекание материалов, теплообмен излучением в сильно поврежденной геометрии, прямое взаимодействие топливных таблеток со средой в канале. Тренды расчетных температур оболочек твэлов по всей высоте сборки воспроизводят тренды измеренных температур, расчетные температуры совпадают или лежат вблизи измеренных значений



Рис. 3. Интегральная наработка водорода в эксперименте Phebus FPT1.

в пределах погрешностей измерений (за исключением поздней фазы разрушения сборки, где становится существенной неоднородность поля температур по сечению – рис. 2). Кроме того, в расчете наблюдается корректное воспроизведение суммарного количества образовавшегося водорода (рис. 3).

В эксперименте разогрев сборки приводил к началу разгерметизации оболочек твэлов через 5800–6200 с после начала активной стадии эксперимента. В расчете по коду COKPAT/B3 разрыв оболочек внутреннего ряда твэлов, облученных в реакторе BR3, произошел в момент времени 5818 с при температуре 1081 К. Для свежего топлива этот момент времени составил 5819 с, соответствующая температура – 1058 К. Для облученных твэлов внешнего ряда время разрыва оболочек составило, соответственно, 6028 с и 1074 К. Важно отметить, что выход ПД непосредственно после разгерметизации оболочек был незначителен. Согласно измерениям, устойчивое детектирование изотопов цезия, йода, теллура, ксенона, молибдена начинается только после 10500 с, что соответствует разогреву сборки до температур 1500–1600 К.

Результаты расчета переноса и осаждения изотопов PB демонстрируют хорошее согласие с экспериментом. В частности, на рис. 4 показана временная зависимость линейной плотности активности (МБк/см) изотопа <sup>137</sup>Cs в горячей и холодной нитках установки (в точках расположения детекторов). Датчики показывают суммарную взвешенную и осажденную активность. Расчетные величины активности цезия в горячей нитке качественно верно показывают наличие повторного взвешивания и перенос содержащих цезий молекул из пространства над сборкой в парогенератор.



Рис. 4. Линейная плотность активности изотопа <sup>137</sup>Сs в горячей и холодной нитках в эксперименте Phebus FPT1.

В работе [10] отмечается, что цезий в горячей нитке присутствовал в основном в форме CsOH, что учитывалось при моделировании.

Расчетное поведение изотопа йода <sup>131</sup> I в холодной нитке также демонстрирует хорошее совпадение с экспериментальными данными (рис. 5). Данные по горячей нитке носят информативный характер, поскольку на части временного интервала активность была выше диапазона измерений датчика. Полученные значения по коду СОКРАТ/ВЗ соответствуют данным измерений и данным из работы [10].

На рис. 6 показана интегральная масса йода, поступившая в ЗО. При сравнении с экспериментальными данными по динамике расхода можно сделать вывод о том, что пары CsI, так же как и пары CsOH, частично конденсировались в пространстве над сборкой, где находились поверхности с низкими температурами, а потом постепенно испарялись при нагреве этих поверхностей (при увеличении тепловой мощности сборки и температуры выходящего газа).

Моделирование процессов в ЗО проводилось в упрощающем предположении о линейной скорости отбора среды (в интервалах пробоотбора) и фиксированной температуре стен. Начальная влажность атмосферы под ЗО была подобрана из условия наилучшего совпадения давления в интервале 0-2000 с (рис. 7). Относительное отклонение расчетного давления в ЗО на интервале 0-27000 с составило 0.1%, среднеквадратическое отклонение –  $\sigma_{PRFSS} = 0.8\%$ . Температура газа, приведенная на рис. 8, в расчете коду СОКРАТ/ВЗ соответствует среднеобъемной температуре. Экспериментальная температура измерялась в верхней части ЗО, в области



**Рис. 5.** Линейная плотность активности изотопа <sup>131</sup>I в горячей и холодной нитках в эксперименте Phebus FPT1.

теплообменника-конденсатора. Абсолютное отклонение расчетной температуры газа в 3О на интервале 0-27000 с составило 5.5 K, среднеквадратическое отклонение  $-\sigma_{\text{TEMP}} = 1.0$  K.

Одной из основных задач моделирования процессов в ЗО было воспроизведение в расчете изменения концентрации взвешенных PB, обусловленного поступлением аэрозольных и парообразных форм из экспериментального контура с последующим их выведением на стенки модели ЗО. Формирование пика концентрации, обусловленного поступлением PB из контура после плавления экспериментальной сборки, наблюдалось в интервале времени от 11000 до 15000 с. После прекращения поступления PB рост концентрации сменялся длительным спадом, вызванным процессами осаждения аэрозолей и частичным выведением парообразных форм. Наибольшие отличия расчетных значений от экспериментальных наблюдались для начальной фазы выброса (интервал времени 11200–13000 с). Они могли быть обусловлены как различиями в воспроизведении динамики источника из экспериментального контура, так и, возможно, влиянием трехмерных эффектов перемешивания среды в ЗО. Отличия наблюдаются только по показаниям гамма-спектрометра. По прецизионным системам OLGA, FIPF, IMPF, MPPF на фазе выброса существенных отклонений расчетных и экспериментальных данных не наблюдается.

Последующий анализ результатов эксперимента показал, что доминирующими формами ряда значимых PB под 3O должны были стать аэрозольные частицы. Соответственно, эволюция концентрации ряда PB под 3O на длительной стадии



Рис. 6. Интегральная масса йода, поступившая под 30 в эксперименте Phebus FPT1.

осаждения может описываться моделями переноса и поведения аэрозолей. В рамках такого допущения в ходе численного моделирования эксперимента удалось корректно воспроизвести эволюцию концентрации соединений цезия. Причем для начальной стадии осаждения (с 15000 до 40000 с) изменение концентрации с приемлемой точностью описывается монодисперсной моделью, не учитывающей влияние размерного спектра аэрозолей на интенсивность выведения (рис. 9). Корректное воспроизведение снижения концентрации на более поздних стадиях (от 4000 с до 80 часов) требует учета изменения размерного спектра аэрозолей. Соответственно, в рамках расчетов использовалась также и полидисперсная модель, позволяющая учесть как влияние различий в размерах частиц на скорость их осаждения, так и влияние изменения их размерного спектра за счет коагуляции. Для полидисперсной модели число размерных групп варьировалось (рассматривались числа размерных групп 6, 11, 16, 21). Полученные для полидисперсного приближения результаты демонстрируют, что для случаев 11, 16 и 21 размерной группы отличия в расчетных оценках составляют значения, существенно меньшие отклонений от эксперимента (рис. 9). Важно отметить также и хорошее совпадение с монодисперсной моделью на начальной стадии (до 40000 с).

Результаты верификационного расчета подтверждают возможность уменьшения числа размерных групп при сохранении точности расчетных оценок выброса из-под ЗО и одновременном значительном ускорении процедуры расчета.



Рис. 7. Давление под 3О в эксперименте Phebus FPT1.



Рис. 8. Температура газовой фазы под 3О в эксперименте Phebus FPT1.



**Рис. 9.** Массовая концентрация цезия в газовой фазе под ЗО в эксперименте Phebus FPT1, полученная для различных чисел размерных групп аэрозолей (6, 11, 16 и 21 группа).

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлены результаты анализа затрат процессорного времени на моделирование отдельных физических процессов и явлений в рамках расчета источника радиоактивных веществ в окружающую среду в ходе тяжелой аварии на энергоблоках АЭС с реакторами ВВЭР.

По итогам анализа результатов моделирования вероятных гипотетических сценариев тяжелых аварий на отечественных АЭС с ВВЭР-1000 (без учета аварийных сценариев, связанных с бассейном выдержки) оценены характерные длительности стадий тяжелой аварии, а также характерные значения затрат процессорного времени на их моделирование. Данные оценки продемонстрировали, что для длительных сценариев (предполагающих начало основного выброса более чем через сутки после наступления исходного события) наибольшее влияние на результирующее время расчета аварии оказывает стадия от выброса РВ под ЗО до отказа ЗО вследствие проплавления расплавом топлива основания бетонной шахты. При моделировании этой стадии значительное влияние на временные затраты, необходимые для расчета источника выброса, оказывают модели переноса и осаждения аэрозолей. Для этих моделей наиболее значимым параметром с точки зрения затрат процессорного времени является количество размерных групп аэрозолей (при неизменной программной реализации модели коагуляции и переноса). Проведенные расчеты эксперимента Phebus FPT1 подтвердили возможность уменьшения числа размерных групп без существенного снижения точности расчетных оценок выброса из-под 30 с одновременным значительным ускорением процедуры расчета. Подобное ускорение может быть обеспечено и в рамках расчетов запроектных аварий на АЭС, так как затраты процессорного времени на вычисления при моделировании переноса PB в 30 находятся в линейной зависимости с числом расчетных ячеек.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Hage M., Kowalik M., Sören J., Löffler H.* Source Term Prediction Software in Case of Severe Accidents: FaSTPro for Shutdown States, Probabilistic Safety Assessment and Management PSAM 14, September 2018, Los Angeles, CA.
- Knochenhauer M., Hedtjärn Swaling V., Alfheim P. Using Bayesian Belief Network (BBN) Modelling for Rapid Source Term Prediction – RASTEP Phase 1, NKS-267, NKS, September 2012.
- McKenna T.J., Giitter J.G. Source Term Estimation during Incident Response to Severe Nuclear Power Plant Accidents, NUREG-1228, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington DC, 1988.
- Herviou K. Development of a methodology and of a computer tool for source term estimation in case of nuclear emergency in a light water reactor (ASTRID), CONTRACT FIKR – CT-2001–00171, Report ASTRID/04.39 v1.1, January 2005.
- 5. Bolshov L.A., Dolganov K.S., Kiselev A.E., Strizhov V.F. Results of SOCRAT code development, validation and applications for NPP safety assessment under severe accidents, Nuclear Engineering and Design, Volume 341, 2019. P. 326–345.
- 6. Uncertainty analyses using the MELCOR severe accident code. In: Evaluation of uncertainties in relation to severe accidents and level 2 probabilistic safety analysis. Workshop proceedings. Aix-en-Provence –Randall O. Gauntt 2005.
- https://www.irsn.fr/EN/Research/publications-documentation/Publications/DPAM/SEMIC/ Pages/Fission-product-transport-modelling-in-the-ASTEC-integral-code-SOPHAEROSmodule-3008.aspx
- 8. Final Report FPT1, CD-ROM.
- 9. *March P., Simondi-Teisseire B.* Overview of the facility and experiments performed in Phébus FP, Annals of Nuclear Energy, V. 61 (2013), P. 11–22.
- 10. Validation of severe accident codes against Phebus FP for plant applications: Status of the PHEBEN2 project, Nuclear engineering and design 221, April 2003, P. 225–240.

# Analysis of The Influence of Models of Individual Physical Processes and Phenomena on the Calculation Time of the Source Term in Severe Accidents

M. Ph. Philippov, M. I. Delova<sup>\*</sup>, K. S. Dolganov, A. E. Kiselev, S. N. Krasnoperov, V. N. Semenov, D. Yu. Tomashchik

Nuclear Safety Institute of the Russian Academy of Sciences (IBRAE RAN), Moscow, Russia \*e-mail: delovami@ibrae.ac.ru

Dependence of the CPU time needs for calculation of the source term during a severe accident at nuclear power plants with WWER reactors from the individual physical processes and phenomena used as part of the calculation tools similar to the SOCRAT/V3 severe accident code is investigated. This analysis allows revealing the most expensive models in terms of runtime. The simplification of these models can ensure the greatest acceleration of the calculation. The relevance of the task draws from the need to develop new or adapt existing calculation tools for assessing the intensity of radioactive emission sources for the tasks of emergency preparedness and response considering the specific requirements for the accuracy of numerical estimates and time to obtain them. The paper demonstrates the possibility of reducing CPU time without significant loss of accuracy of the numerical estimates by simplifying the spectrum of aerosols sizes. The efficiency of the proposed approach is demonstrated by the example of modeling the Phebus FPT1 experiment.

Keywords: NPP, severe accidents, modeling, emergency response

УДК 536.2 (075) 46

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ (ОБЗОР)

© 2024 г. В. А. Кудинов<sup>\*</sup>, К. В. Трубицын, Е. В. Котова, Т. Е. Гаврилова, В. К. Ткачев

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения высшего образования "Самарский государственный технический университет", Самара, Россия \*e-mail: totig@ yandex.ru

> Поступила в редакцию 08.10.2023 г. После доработки 17.06.2024 г. Принята к публикации 22.06.2024 г.

Представлен обзор исследований, связанных с использованием дополнительных граничных условий (ДГУ) и дополнительных искомых функций (ДИФ) при получении аналитических решений задач теплопроводности.  $\Pi \Gamma Y$  позволяют выполнить уравнение на границах, что приводит к его выполнению и внутри области, исключая непосредственное интегрирование по пространственной координате. ДИФ позволяет сводить уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, из решения которого находятся собственные числа краевой задачи. Собственные числа в классических методах находятся из решения краевой задачи Штурма—Лиувилля, сформулированной в области пространственной переменной. Следовательно, используемый в настоящей работе метод приводит к другому алгоритму их определения, основанному на решении временного дифференциального уравнения, порядок которого определяется числом приближений получаемого решения. В задаче, основанной на определении фронта температурного возмушения, найдена эквивалентность решений параболического и гиперболического уравнений теплопроводности. И, в частности, найдено число приближений, ограничивающих скорость продвижения тепловой волны в решении параболического уравнения до величины, равной ее реальному значению для конкретного материала, при которой она совпадает с решением гиперболического уравнения.

*Ключевые слова:* краевые задачи, аналитические решения, ДИФ, ДГУ, конечная скорость распространения теплоты, фронт температурного возмущения, параболические и гиперболические уравнения теплопроводности

**DOI:** 10.31857/S0002331024020053

### введение

Для ряда сложных краевых задач (нелинейных, с переменными свойствами и др.) точные решения не найдены. Для многих других задач полученные точные

аналитические решения представляются в виде сложных рядов, плохо сходящихся в окрестности малых значений времени [1–6]. Применение классических аналитических методов для цилиндрических и сферических тел приводит к бесконечным рядам, включающим функции Бесселя. Используемые в решениях собственные числа затруднительно представить в виде общей формулы, так как они определяются из степенных алгебраических (характеристических) уравнений, для которых могут быть получены лишь численные решения. Классические методы применительно к краевым задачам с осевой и центральной симметрией неэффективны еще и в тех случаях, когда необходимо находить решение при малых значениях времени, ввиду того, что требуется использование большого числа приближений. Поэтому возникает потребность в использовании более эффективных методов. Среди них распространение получили методы Л.В. Канторовича, Бубнова–Галеркина, интегральный метод теплового баланса и др. [4–14]. Они более универсальны, чем точные, однако приводят к низкой точности решений. Основная причина заключается в необходимости выполнения осредненных по пространственной переменной исходных дифференциальных уравнений, что приводит к низкой точности определения собственных чисел. В интегральном методе теплового баланса процесс теплопроводности представляется в виде двух стадий по времени. Применение ДИФ для каждой стадии позволяет свести исходное уравнение в частных производных к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для повышения точности используются ДГУ [11-16].

## 1. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ПЛАСТИНЕ (ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ПЕРВОГО РОДА)

Во всех представленных в настоящей работе решениях краевых задач используется метод, основанный на определении ДИФ и ДГУ, позволяющий получать точные аналитические решения. Использование ДГУ позволяет выполнить исходное дифференциальное уравнение на границах, что приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, исключая процесс непосредственного интегрирования по пространственной переменной. Использование ДИФ позволяет сводить уравнение в частных производных к временному обыкновенному дифференциальному уравнению, из решения которого находятся собственные числа краевой задачи.

Основные положения метода рассмотрим применительно к решению задачи теплопроводности для пластины в математической постановке вида (рис. 1)

$$\partial \Theta(\xi, Fo) / \partial Fo = \partial^2 \Theta(\xi, Fo) / \partial \xi^2, (Fo > 0; 0 < \xi < 1),$$
(1)

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \tag{2}$$

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = 1, \tag{3}$$

$$\partial \Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial \xi = 0,$$
 (4)

где  $\Theta = (T - T_0)/(T_{\rm CT} - T_0)$  – безразмерная температура; Fo =  $a\tau/\delta^2$  – число Фурье;  $\xi = x/\delta$  – безразмерная координата; x – координата;  $\delta$  – толщина



пластины; a – коэффициент температур<br/>опроводности;  $\tau$  – время;  $T_0$  – начальная температура;<br/>  $T_{\rm CT}$  – температура стенки.

Введем ДИФ

$$q(\text{Fo}) = \Theta(1, \text{Fo}). \tag{5}$$

Решение будем разыскивать в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k(q) \varphi_k(\xi),$$
(6)

где  $b_k(q)$ ,  $(k = \overline{1, n})$  – неизвестные коэффициенты;  $\varphi_k(\xi) = \sin(r\pi\xi/2)$ , (r = 2k - 1) – координатные функции.

Соотношение (6) удовлетворяет условиям (3), (4). Коэффициенты  $b_k(q)$ ,  $(k = \overline{1, n})$  будем находить из (5) и ДГУ, общие формулы для которых записываются в виде [11, 12, 16]

$$\partial^{i}\Theta(0, \text{Fo})/\partial\xi^{i} = 0, (i = 2, 4, 6, ...),$$
 (7)

$$\partial^{2i}\Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial\xi^{2i} = \partial^{i}q(\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}^{i}, (i = 1, 2, 3, ...),$$
(8)

$$\partial^{i}\Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial\xi^{i} = 0, (i = 3, 5, 7, ...).$$
 (9)

Отметим, что ДГУ (7), (9) решением (6) выполняются. Для нахождения  $b_k(q)$  будем использовать соотношение (5) и ДГУ (8).

В первом приближении подставим (6), ограничившись одним слагаемым ряда, в (5). Для  $b_{l}(q)$  получаем алгебраическое уравнение, после решения которого решение (6) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + (q(Fo) - 1)\sin(\pi\xi/2).$$
<sup>(10)</sup>

Потребуем выполнения уравнения (1) в точке  $\xi = 1$  (или в любой другой точке, исключая  $\xi = 0$ )

$$\frac{\partial \Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2}.$$
 (11)

Подставляя (10) в (11), получаем

$$8dq/dFo = -\pi^2(q-1)/4.$$
 (12)

Отметим, что уравнение (12) получено, минуя процесс непосредственного интегрирования уравнения (1) по переменной  $\xi$ . Уравнение (12) получается и для любой другой точки координаты  $\xi$ , не равной нулю. В точке  $\xi = 0$  задано граничное условие первого рода (уравнение (1) в этой точке удовлетворяется в предельном смысле – правая и левая его части равны нулю).

Интегрируя уравнение (14), получаем

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1 \exp(-v_1 \mathrm{Fo}),$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования;  $v_1 = \pi^2/4$  – первое собственное число, совпадающее с точным его значением [2].

Отметим, что собственное число получено не из задачи Штурма–Лиувилля, включающей уравнение второго порядка по пространственной переменной, а из решения ОДУ относительно ДИФ, изменяющейся во времени. Таким образом, в данном случае можно отметить другое направление определения собственных чисел [11, 12, 15, 16].

Подставляя найденное q(Fo) в (10), имеем

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + C_1 \exp(-v_1 \text{Fo}) \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right).$$
(13)

Для определения  $C_1$ , используя (2), получаем

$$C_1 \int_0^1 \sin^2(\pi\xi/2) \, d\xi = -\int_0^1 \sin(\pi\xi/2) \, d\xi. \tag{14}$$

Из (14) находим  $C_1 = -4/\pi$ , совпадающее с точным его значением.

Соотношение (13) является решением задачи (1)–(4) в первом приближении. Оно удовлетворяет условиям (3)–(4) и уравнению (1) в области  $0 \le \xi \le 1$ . Выполним исследование выполнения уравнения (1) в точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Подставляя (13) в (1), для его правой и левой части получаем одинаковую величину

$$N(\xi, Fo) = \pi \exp(-\pi^2 Fo/4) \sin(\pi \xi/2),$$
 (15)

принимающую в точке  $\xi = 0$  нулевое значение, то есть уравнение (1) в этой точке удовлетворяется в предельном смысле [15]. Уравнение (1) удовлетворяется при любых значениях  $0 \le \xi \le 1$ , в том числе и в граничных точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Как следует из рис. 2, с увеличением Fo  $N(\xi, Fo) \rightarrow 0$ .

Анализ расчетов по (13) приводит к заключению, что при  $0.1 \le Fo < \infty$  расхождение с точным решением не превышает 5%.



**Рис. 2.** Изменение  $N(\xi, Fo)$ .

Решение (13) точно удовлетворяет всем условиям задачи (1)–(4), за исключением начального условия (2). Для повышения точности найдем решение во втором приближении. Подставляя (6) в (5), (8) (при i=1), для  $b_1(q)$  и  $b_2(q)$  получаем систему двух алгебраических уравнений. Соотношение (6) после их определения будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \begin{bmatrix} -(4q' + 9\pi^2(q-1))\sin(\pi\xi/2) + \\ +(4q' + \pi^2(q-1))\sin(3\pi\xi/2) \end{bmatrix} / (8\pi^2).$$
(16)

Подставим (16) в (11)

$$\frac{4}{3\pi^3}q'' + \frac{10}{3\pi}q' + \frac{3\pi}{4}q - \frac{3\pi}{4} = 0,$$
(17)

где  $q'' = d^2 q / d \text{Fo}^2$ ; q' = dq / d Fo.

Уравнение (17) получается подстановкой (16) в (11) применительно к любой другой точке переменной  $\xi$  (исключая  $\xi = 0$ ), что оказалось возможным ввиду выполнения решением (6) ДГУ (7)–(9). Следовательно, выполнение уравнения на границах приводит к его выполнению и внутри области.

Интеграл уравнения (17) будет

$$q(\text{Fo}) = C_1 \exp(-v_1 \text{Fo}) + C_2 \exp(-v_2 \text{Fo}),$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования;  $v_2 = 9\pi^2/4$  – второе собственное число, совпадающее с точным его значением [2].

Подставим q(Fo) в (16)

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - C_1 \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} \text{Fo}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - C_2 \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4} \text{Fo}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right).$$
(18)

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  находятся из интеграла взвешенной невязки начального условия (2) и выполнения требования ее ортогональности к функциям sin( $j\pi\xi$  / 2), (j = 1,3)

$$\int_0^1 \left( C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) \right) \sin\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right) d\xi = \int_0^1 \sin\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right) d\xi, (j = 1, 3).$$
(19)

Ввиду ортогональности координатных функций, система двух алгебраических уравнений (19) разделяется так, что в каждое уравнение входит лишь одно неизвестное

$$C_k \int_0^1 \sin^2(r\pi\xi/2) d\xi = \int_0^1 \sin(r\pi\xi/2) d\xi, (k = 1, 2; r = 2k - 1).$$
(20)

Из (20) получаем  $C_k = -4/(r\pi)$ , (k = 1,2; r = 2k - 1). Найденные  $C_1$  и  $C_2$  совпадают с точными их значениями [2]. С их учетом решение (18) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{k=1}^{2} \frac{4}{r\pi} \exp\left(-\frac{r^2 \pi^2}{4} Fo\right) \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right), (r = 2k - 1).$$
(21)

В третьем приближении  $b_k(q)$ , (k = 1,2,3) находятся из (5), (8) (i = 1,2). Для q(Fo) будем иметь

$$\frac{4}{15\pi^5}q^{\prime\prime\prime} + \frac{7}{3\pi^3}q^{\prime\prime} + \frac{259}{60\pi}q^{\prime} + \frac{15}{16}\pi q - \frac{15}{16}\pi = 0,$$
(22)

где  $q^{\prime\prime\prime} = d^3 q / d \mathrm{Fo}^3$ .

Подставив решение уравнения (22) в (6), находим

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + C_1 \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} \text{Fo}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - C_2 \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4} \text{Fo}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) + C_3 \exp\left(-\frac{25\pi^2}{4} \text{Fo}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{2}\xi\right).$$
(23)

Постоянные  $C_k$ , (k = 1,2,3) находятся из начального условия (2)

$$\int_{0}^{1} \sum_{k=1}^{3} C_{k} \exp\left(-\frac{r^{2} \pi^{2}}{4} \operatorname{Fo}\right) \sin\left(\frac{r\pi}{2} \xi\right) \sin\left(\frac{j\pi}{2} \xi\right) d\xi = \int_{0}^{1} \sin\left(\frac{j\pi}{2} \xi\right) d\xi \qquad (24)$$
$$(j = k = 1, 2, 3; r = 2k - 1).$$

Из-за ортогональности синусов система уравнений (24) разделяется. Решение любого из этих уравнений будет  $C_k = 4(-1)^k/(r\pi)$ .

Решение (23) с учетом  $C_k$ , (k = 1,2,3) будет

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^{3} \frac{4(-1)^{k+1}}{r\pi} \exp\left(-\frac{r^2 \pi^2}{4} \text{Fo}\right) \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right).$$
 (25)

Исходя из формул (16), (21), (25) и из анализа решений последующих приближений, получаем общую формулу вида

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} A_k \exp(-v_k \text{Fo}) \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right),$$
(26)

где  $A_k = 4(-1)^{k-1} / (r\pi); v_k = r^2 \pi^2 / 4, (r = 2k - 1; k = \overline{1, n}).$ 

Из анализа решения (26), можно заключить, что оно представляет точное аналитическое решение задачи (1)–(4) [2].

## 2. НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ – ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ КООРДИНАТЫ

Рассмотрим краевую задачу теплопроводности для пластины при линейном изменении начальной температуры (рис. 3)

$$\partial \Theta(\xi, Fo) / \partial Fo = \partial^2 \Theta(\xi, Fo) / \partial \xi^2, (Fo > 0; 0 < \xi < 1),$$
(27)

$$\Theta(\xi, 0) = 1 - \xi, \tag{28}$$

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = 0, \tag{29}$$

$$\Theta(1, \mathrm{Fo}) = 0. \tag{30}$$

Введем ДИФ, характеризующую изменение градиента температуры во времени в точке  $\xi = 1$ 

$$q(\text{Fo}) = \partial \Theta(1, \text{Fo})/\partial \xi = \text{tg}\alpha.$$
 (31)

Решение задачи принимаем в виде

$$\Theta(\xi, \operatorname{Fo}) = \sum_{k=1}^{n} b_k(q) \varphi_k(\xi), \qquad (32)$$

где  $b_k(q)$  – неизвестные коэффициенты;  $\phi_k(\xi) = \sin(k\pi\xi)$ ,  $(k = \overline{1, n})$  – координатные функции.

Формула (32) удовлетворяет условиям (29), (30). Коэффициенты  $b_k(q)$  находятся из (31) и ДГУ вида

$$\partial^i \Theta(0, \text{Fo}) / \partial \xi^i = 0, \tag{33}$$

$$\partial^{i}\Theta(1, \mathrm{Fo}) / \partial\xi^{i} = 0, (i = 2, 4, 6, ...).$$
 (34)



Рис. 3. Схема теплообмена.

Соотношение (32) удовлетворяет ДГУ (33), (34), что приводит к выполнению уравнения (27) в точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  (в предельном смысле – при равенстве нулю всех его членов [15]).

Коэффициенты  $b_k(q)$ ,  $(k = \overline{1, n})$  соотношения (32) находятся из ДГУ, получаемых на основе соотношения (31) и уравнения (27). Их общая формула будет [12]

$$\partial^{2i+1}\Theta(1, \operatorname{Fo}) / \partial \xi^{2i+1} = \partial^{i} q(\operatorname{Fo}) / \partial \operatorname{Fo}^{i}, (i = 1, 2, 3, \ldots).$$
(35)

В первом приближении, подставив (32) в (31), для  $b_1(q)$  имеем алгебраическое уравнение. Его решение:  $b_1(q) = q / \pi$ . Соотношение (32) принимает вид

$$\Theta(\xi, \operatorname{Fo}) = (q / \pi) \sin(\pi \xi). \tag{36}$$

Подставив (36) в (27), имеем

$$dq / dFo + \pi^2 q = 0. \tag{37}$$

Интеграл уравнения (37) будет

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1 \exp(-v_1 \mathrm{Fo}),$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования;  $v_1 = \pi^2$  – первое собственное число, совпадающее с точной его величиной [2].

Соотношение (36) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = (C_1 \exp(-\pi^2 Fo) \sin(\pi \xi)) / \pi.$$
 (38)

Постоянная интегрирования C<sub>1</sub> находится из начального условия (28)

$$(C_1 / \pi) \int_0^1 \sin^2(\pi\xi) d\xi = \int_0^1 (1 - \xi) \sin(\pi\xi) d\xi.$$
(39)

Из (39) находим  $C_1 = 2$ .

Во втором приближении подставим (32) в (31), (35) (при i = 1). Для  $b_1(q)$  и  $b_2(q)$  получаем два алгебраических уравнения. После их определения (32) будет

$$\Theta(\xi, Fo) = -\left[(4\pi^2 q + q')\sin(\pi\xi) + (\pi^2 q + q')\sin(2\pi\xi)\right] / (3\pi^3).$$
(40)

Подставим (40) в (27)

$$q'' + 5\pi^2 q' + 4\pi^4 q = 0.$$
<sup>(41)</sup>

Интегрируя (41), имеем

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1 \exp(-v_1 \mathrm{Fo}) + C_2 \exp(-v_2 \mathrm{Fo}),$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования;  $v_2 = 4\pi^2$  – второе собственное число, равное точному его значению [2].

Подставляя найденное q(Fo) в (40), имеем

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = -\left[2C_1 e^{-\pi^2 \text{Fo}} \sin(\pi\xi) - C_2 e^{-4\pi^2 \text{Fo}} \sin(2\pi\xi)\right] / (2\pi).$$
(42)

Постоянные интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$  находятся из начального условия (28)

$$-\int_0^1 \left[ 2C_1 \sin(\pi\xi) - C_2 \sin(2\pi\xi) \right] \sin(j\pi\xi) d\xi = 2\pi \int_0^1 (1-\xi) \sin(j\pi\xi) d\xi, (j=1,2).$$
(43)

Из решения алгебраических уравнений (43) получаем  $C_1 = -2$ ;  $C_2 = 2$ .

В третьем приближении подставим (32) в (31), (35) (i = 1,2). Для  $b_k(q)$ , (k = 1,2,3) имеем систему трех алгебраических уравнений. Подставляя (32) с учетом полученных  $b_k(q)$  в (27), находим

$$q''' + 14\pi^2 q'' + 49\pi^4 q' + 36\pi^6 q = 0.$$

Подставляя интеграл последнего уравнения в (32), имеем

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = -\frac{1}{6\pi} \bigg[ 6C_1 e^{-\nu_1} \sin(\pi\xi) + 3C_2 e^{-\nu_2} \sin(2\pi\xi) - 2C_3 e^{-\nu_3} \sin(3\pi\xi) \bigg], \quad (44)$$

где  $v_3 = 9\pi^2$  – третье собственное число, совпадающее с точным его значением [2].

Для нахождения постоянных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  из выполнения начального условия (28) имеем систему трех алгебраических уравнений

$$\int_{0}^{1} \Theta(\xi, 0) \sin(j\pi\xi) d\xi = \int_{0}^{1} (1-\xi) \sin(j\pi\xi) d\xi, (j=1,2,3).$$
(45)

Ее решение:  $C_k = 2(-1)^k$ , (k = 1,2,3).

Аналогично было получено решение задачи в четвертом приближении

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{2}{\pi} \Biggl[ e^{-\pi^2 Fo} \sin(\pi\xi) + \frac{e^{-4\pi^2 Fo}}{2} \sin(2\pi\xi) + \frac{e^{-9\pi^2 Fo}}{3} \sin(3\pi\xi) + \frac{e^{-16\pi^2 Fo}}{4} \sin(4\pi\xi) \Biggr].$$
(46)
Из анализа формул (38), (42), (44), (46), можно записать общую формулу для них, которая оказывается эквивалентной точному решению задачи (27)–(30) [2]

$$\Theta(\xi, \operatorname{Fo}) = \sum_{k=1}^{n} A_k \exp(-v_k^2 \operatorname{Fo}) \sin(v_k \xi), \qquad (47)$$

где  $v_k = k\pi$ ;  $A_k = 2(-1)^k / v_k$ .

#### 3. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ – ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ ВРЕМЕНИ

Найдем решение краевой задачи теплопроводности для пластины с переменным во времени граничным условием

$$\partial \Theta(\xi, \text{Fo}) / \partial \text{Fo} = \partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo}) / \partial \xi^2, (\text{Fo} > 0; 0 < \xi < 1), \tag{48}$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \tag{49}$$

$$\partial \Theta(0, \mathrm{Fo}) / \partial \xi = 0, \tag{50}$$

$$\Theta(1, \mathrm{Fo}) = B\mathrm{Fo},\tag{51}$$

где  $\Theta = (T - T_0) / T_0$ ; Fo =  $a\tau / \delta^2$ ;  $\xi = x / \delta$ ;  $B = l\delta^2 / (aT_0)$ ;  $l = dT(\delta,\tau) / d\tau$ – скорость изменения температуры в точке  $x = \delta$ ;  $B = d\Theta(1, \text{Fo}) / d\text{Fo}$  – безразмерная скорость нагрева стенки;  $\Theta$  – безразмерная температура;  $\delta$  – толщина пластины.

Введем ДИФ, характеризующую изменение температуры в точке  $\xi = 0$ 

$$q(\text{Fo}) = \Theta(0, \text{Fo}). \tag{52}$$

Решение задачи принимаем в виде

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = B[\text{Fo} - (1/2)(1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q) \psi_k(\xi)],$$
(53)

где  $b_k(q)$ ,  $(k = \overline{1, n})$  – неизвестные коэффициенты;  $\psi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$ , (r = 2k - 1; k = 1, n) – координатные функции.

Очевидно, что решение вида (53) удовлетворяет условиям (50), (51). Коэффициенты  $b_k(q)$ , (k = 1, n) будем определять из (52) и следующих ДГУ

$$\partial^2 \Theta(1, \operatorname{Fo}) / \partial \xi^2 = \mathbf{B},$$
 (54)

$$\partial^{i}\Theta(0, \text{Fo}) / \partial\xi^{i} = 0; (i = 3, 5, 7, ...),$$
(55)

$$\partial^i \Theta(1, \text{Fo}) / \partial \xi^i = 0; (i = 4, 6, 8, ...).$$
 (56)

Соотношение (54) с учетом  $B = d\Theta(1, Fo) / dFo$  представляет уравнение (48) применительно к точке  $\xi = 1$ , которое будет выполнено в процессе получения

точного аналитического решения задачи (48)–(51). ДГУ (55), (56) ввиду принятой системы координатных удовлетворяются соотношением (53) в любом приближении.

Для определения коэффициентов  $b_k(q)$  решения (53) используется соотношение (52) и ДГУ, получаемые на основе этого же соотношения и уравнения (48). Общая формула для них имеет вид [12]

$$\partial^{2i}\Theta(0, \operatorname{Fo}) / \partial\xi^{2i} = \partial^{i}q(\operatorname{Fo}) / \partial\operatorname{Fo}^{i}, (i = 1, 2, 3, ...).$$
(57)

Для получения решения задачи (48)–(51) в первом приближении подставим (53) в (52). Отсюда находим:  $b_1(q) = q(Fo) - BFo$ . Соотношение (53) принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = B \bigg[ \text{Fo} - (1/2) \Big( (1 - \xi^2) + (2\text{Fo} - 1 + 2q / B) \cos(\pi\xi / 2) \Big) \bigg].$$
(58)

Подставляя (58) в (48) и требуя выполнения полученного соотношения в любой точке пространственной переменной ( $\xi \neq 1$ ), получаем

$$8q' - 2\pi^2 q = B(8 + \pi^2 (2\text{Fo} - 1)).$$

Интегрируя последнее уравнение и подставляя полученное решение в (58), находим

$$\Theta(\xi, \operatorname{Fo}) = B\left(\operatorname{Fo} - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \frac{C_1}{B}\exp\left(-\frac{\pi^2 \operatorname{Fo}}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)\right).$$
(59)

После определения постоянной интегрирования  $C_1$  из интеграла невязки начального условия (49) соотношение (58) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = B\left(Fo - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) + \frac{16}{\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi^2 Fo}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)\right).$$
 (60)

При получении решения во втором приближении после подстановки (53) в (52), (57) (i = 1) относительно  $b_1(q)$  и  $b_2(q)$  имеем систему двух уравнений. С учетом их значений соотношение (53) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = B \Big[ Fo - (1/2)(1 - \xi^2) + \eta_3(8q' + 18\pi^2 q - B\eta_1) \times \\ \times \cos(\pi\xi/2) - \eta_3(8q' + 2\pi^2 q - B\eta_2)\cos(\pi\xi/2) \Big],$$
(61)

где  $\eta_1 = 8 + 9\pi^2(2Fo - 1)$ ;  $\eta_2 = 8 + \pi^2(2Fo - 1)$ ;  $\eta_3 = 1 / (16\pi^2 B)$ ;  $\eta_4 = 1 / (\pi^2 B)$ . Подставляя (61) в (48) ( $\xi \neq 1$ ), находим

$$32q'' + 80\pi^2 q' - B\pi^4 \left( 80 + 9\pi^2 (2Fo - 1) \right) = 0.$$
(62)

После определения функции q(Fo) из уравнения (62) и констант интегрирования из (49) решение во втором приближении будет

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{B}{54\pi^3} \left( 27\pi^3 (Fo - 1 - \xi^2) + 864e^{-\frac{\pi^2 Fo}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + 32e^{-\frac{9\pi^2 Fo}{4}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) \right).$$
(63)

В третьем приближении, подставляя (53) в (52), (58) (i = 1,2), для коэффициентов  $b_k(q)$ , (k = 1,2,3) имеем систему трех алгебраических уравнений. Повторяя изложенный выше алгоритм, получаем следующую формулу для безразмерной температуры

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{B}{\pi^3} \left( \pi^3 (Fo - \frac{1}{2}(1 - \xi^2)) + 16e^{-\frac{\pi^2 Fo}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - \frac{16}{27}e^{-\frac{9\pi^2 Fo}{4}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) + \frac{16}{125}e^{-\frac{25\pi^2 Fo}{4}} \cos\left(\frac{5\pi}{2}\xi\right) \right).$$
(64)

На основе формул (60), (63), (64) получаем общую формулу решения задачи (48)–(51)

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = B \left[ \text{Fo} - \frac{1}{2} (1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^n \frac{4(-1)^{k+1}}{r\pi} e^{-\left(\frac{r\pi}{2}\right)^2 \text{Fo}} \frac{1}{(r\pi/2)^2} \cos\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) \right], \quad (65)$$

где r = 2k - 1.

Соотношение (65) при  $n \to \infty$  представляет точное аналитическое решение задачи (48)–(51) [2].

### 4. ПОСТОЯННЫЙ ВНУТРЕННИЙ ИСТОЧНИК ТЕПЛОТЫ

В качестве последующего примера рассмотрим получение точного аналитического решения задачи теплопроводности для пластины с постоянным внутренним источником теплоты в математической постановке вида

$$\partial \Theta(\xi, Fo) / \partial Fo = \partial^2 \Theta(\xi, Fo) / \partial \xi^2 + Po, (Fo > 0; 0 < \xi < 1),$$
(66)

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \tag{67}$$

$$\partial \Theta(0, \text{Fo}) / \partial \xi = 0, \tag{68}$$

$$\Theta(1, \mathrm{Fo}) = 1,\tag{69}$$

где Ро =  $\omega \delta^2 / [\lambda (T_{\rm CT} - T_0)]$  – число Померанцева;  $\omega$  – мощность внутреннего источника теплоты;  $\delta$  – толщина пластины;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\Theta = (T - T_0) / (T_{\rm CT} - T_0)$  – безразмерная температура.

ДИФ в данном случае представляется в виде (52). Решение задачи будем разыскивать в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \frac{Po}{2}(1 - \xi^2) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q) \varphi_k(\xi),$$
(70)

где  $b_k(q)$ ,  $(k = \overline{1, n})$  – неизвестные коэффициенты;  $\phi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$ , (r = 2k - 1; k = 1, n) – координатные функции.

Решение (70) удовлетворяет условиям (68), (69). Коэффициенты  $b_k(q)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) будем находить из (52) и ДГУ, определяемых по формулам (55)–(57).

Первым ДГУ применительно к точке  $\xi = 0$  является соотношение

$$\frac{\partial q(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + \text{Po}, \tag{71}$$

которое не описывается общей формулой (57). Данное соотношение будет выполнено при нахождении коэффициентов  $b_1(q)$  и  $b_2(q)$  во 2-ом приближении. Очевидно, что соотношение (70) удовлетворяет ДГУ (55), (56). Для получения первого приближения подставим (70) в (52). Для  $b_1(q)$  будем иметь алгебраическое уравнение. Его решение:  $b_1(q) = q$ (Fo) – 1 – Po / 2. Соотношение (70) с учетом  $b_1(q)$  будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + Po(1 - \xi^2) / 2 + (q - 1 - Po / 2)\cos(\pi\xi / 2).$$
(72)

Подставляя (72) в (66), находим

$$8dq / dFo + 2\pi^2 q - \pi^2 (2 + Po) = 0.$$
(73)

Интегрируя уравнение (73) и подставляя его решение в (72), находим

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + Po(1 - \xi^2) / 2 + C_1 \exp(-\pi^2 Fo / 4) \cos(\pi\xi / 2).$$
(74)

Постоянная C<sub>1</sub> находится из условия (67)

$$\int_{0}^{1} \left[ 1 + \operatorname{Po}(1 - \xi^{2}) / 2 + C_{1} \cos(\pi \xi / 2) \right] \cos(\pi \xi / 2) d\xi = 0.$$
 (75)

Определяя интегралы, находим

$$C_1 = -4(\pi^2 - 4\text{Po}) / \pi^3.$$
(76)

Отметим, что уравнение (73) может быть получено применительно к любой точке переменной  $\xi$  ( $0 \le \xi \le 1$ ), за исключением  $\xi = 1$ , где уравнение (66) удовлетворяется в предельном смысле — при равенстве нулю всех его слагаемых.

Для получения второго приближении подставим (70) в (52), (71). Для  $b_1(q)$  и  $b_2(q)$  получаем систему двух алгебраических уравнений. Соотношение (70) после их определения принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + Po(1 - \xi^{2}) / 2 + \left[\frac{q'}{2\pi^{2}} + \frac{9}{8}\left(q - 1 - \frac{Po}{2}\right)\right] \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + \left[\frac{1}{8}\left(1 + \frac{Po}{2} - q\right) - \frac{q'}{2\pi^{2}}\right] \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right).$$
(77)

Подставим (77) в (66)

$$16q'' / \pi^4 + 40q' / \pi^2 + 9(q - 1 - \text{Po} / 2) = 0.$$
(78)

Интегрируя (78) и подставляя q(Fo) в (77), находим

$$\Theta(\xi,0) = 1 + \frac{\text{Po}}{2}(1-\xi^2) + C_1 e^{-\nu_1 \text{Fo}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + C_2 e^{-\nu_2 \text{Fo}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right), \tag{79}$$

где  $v_1 = \pi^2 / 4$ ;  $v_2 = 9\pi^2 / 4$  – собственные числа, равные точным их величинам [2].

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из (67), выполняя требование ортогональности невязки начального условия функциям  $\varphi_j(\xi) = \cos(j\pi\xi/2)$  j = r = 2k - 1, k = 1, 2

$$\int_{0}^{1} \left[ 1 + \frac{Po}{2} (1 - \xi^{2}) + C_{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + C_{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) \right] \cos\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right) d\xi = 0, (j = 1, 3).$$
(80)

Вследствие ортогональности косинусов система уравнений (80) разделяется (каждое уравнение содержит одно неизвестное). Отсюда получаем:  $C_1 = -4(\pi^2 + 4\text{Po}) / \pi^3$ ;  $C_2 = 4(9\pi^2 + 4\text{Po}) / (27\pi^3)$ .

Соотношение (69) принимает вид

$$\Theta(\xi,0) = 1 + \frac{Po}{2}(1-\xi^2) - \frac{4}{\pi^3}(\pi^2 + 4Po)e^{-\nu_1 Fo}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + \frac{4}{27\pi^3}(9\pi^2 + 4Po)e^{-\nu_2 Fo}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right).$$
(81)

В третьем приближении для получения  $b_k(q)$ , (k = 1,2,3) используются условия (52), (71), (57) (при i = 1). Относительно q(Fo) будем иметь дифференциальное уравнение 3-го порядка, постоянные интегрирования которого находятся из (67). Решение в третьем приближении имеет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + Po(1 - \xi) / 2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} A_{k} (1 + Po / v_{k}^{2}) e^{-v_{k}^{2} Fo} \cos(v_{k} \xi),$$
(82)
$$\therefore v_{k} = r^{2} \pi^{2} / 4 \therefore r = 2k - 1.$$

где  $A_k = 4(-1)^{k+1} / (r\pi)$ ;  $v_k = r^2 \pi^2 / 4$ ; r = 2k - 1.

Анализ соотношения (82) позволяет заключить, что коэффициенты  $A_k$  и собственные числа  $v_k$  совпадают с точными их значениями. Следовательно, при  $n \to \infty$  соотношение (82) представляет точное аналитическое решение задачи (66)–(69) [2].

#### 5. НЕСИММЕТРИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА

Найдем решение задачи теплопроводности для пластины при несимметричных граничных условиях 1-го рода (рис. 4)

$$\partial \Theta(\xi, Fo) / \partial Fo = \partial^2 \Theta(\xi, Fo) / \partial \xi^2, (Fo > 0; 0 < \xi < 1),$$
(83)

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \tag{84}$$



Рис. 4. Расчетная схема теплообмена.

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = 1, \tag{85}$$

$$\Theta(1, \mathrm{Fo}) = 0, \tag{86}$$

где  $\Theta = (T - T_0) / (T_{C1} - T_0)$ ; Fo =  $a\tau / \delta^2$ ;  $\xi = x/\delta$ ;  $T_C$  – начальная температура;  $T_{C1}$  – температура пластинки при x = 0;  $T_{C2} = T_0$  – температура пластины при  $x = \delta$ ; x – координата;  $\delta$  – толщина пластины;  $\xi = x/\delta$  – безразмерная координата; Fo =  $a\tau / \delta^2$  – число Фурье;  $\tau$  – время; a – коэффициент температуропроводности.

В точке  $\xi = 1$  используем ДИФ

$$q(\text{Fo}) = \partial \Theta(1, \text{Fo}) / \partial \xi, \qquad (87)$$

где α – угол наклона кривой температуры к оси ξ.

Решение будем искать в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi - \sum_{k=1}^{n} b_k(q) \varphi_k(\xi),$$
(88)

где  $b_k(q)$  – неизвестные коэффициенты;  $\varphi_k(\xi) = \sin(k\pi\xi)$  – координатные функции.

Решение (88) удовлетворяет условиям (85), (86). Для нахождения коэффициентов  $b_k(q)$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) используем соотношение (87) и ДГУ (7)–(9).

Очевидно, что решение (88) удовлетворяет ДГУ (7), (9), что приводит к выполнению уравнения (83) в граничных точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  (в предельном смысле).

В первом приближении подставим (88) в (87). Для  $b_1(q)$  имеем алгебраическое уравнение, после решения которого (88) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi - [1 + q(Fo)]\sin(\pi\xi) / \pi.$$
(89)

Подставляя (89) в уравнение (83), положив  $\xi$  равным любому числу (0 <  $\xi$  < 1) , находим

$$dq(Fo) / dFo + (1 + q(Fo)) = 0.$$
 (90)

Определяя интеграл уравнения (90) и подставляя в (89), имеем

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi - \left(C_1 \exp(-\pi^2 Fo) \sin(\pi \xi)\right) / \pi.$$
(91)

Постоянная  $C_1$  находится из условия ортогональности невязки начального условия (84) к координатной функции  $\varphi_1(\xi)$ 

$$\int_{0}^{1} \left( 1 - \xi^{2} - \frac{C_{1}}{\pi} \sin(\pi\xi) \right) \sin(\pi\xi) d\xi = 0.$$
(92)

Соотношение (92) относительно  $C_1$  представляет алгебраическое уравнение. Его решение:  $C_1 = 2$ .

Во втором приближении после подстановки (88) в (87) и (8) (i = 1) для  $b_1(q)$  и  $b_2(q)$  получаем систему двух алгебраических уравнений. После их нахождения (88) будет

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \xi - \frac{\left[2\left(q' + 4\pi^2(1+q)\right)\sin(\pi\xi) + (q' + \pi^2(1-q))\sin(2\pi\xi)\right]}{6\pi^3}.$$
 (93)

Подставляя (93) в уравнение (83), находим

$$q'' + 5\pi^2 q' - 4\pi^4 q = 0.$$
(94)

Интегрируя (94), имеем

$$q(\text{Fo}) = C_1 \exp(-\pi^2 \text{Fo}) + C_2 \exp(-4\pi^2 \text{Fo}) - 1.$$
 (95)

Подставим (95) в (93)

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \xi - C_1 e^{-\pi^2 \text{Fo}} \sin(\pi\xi) + 0,5C_2 e^{-4\pi^2 \text{Fo}} \sin(2\pi\xi).$$
(96)

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начального условия (84)

$$\int_0^1 [1 - \xi - C_1 \sin(\pi\xi) + 0, 5C_2 \sin(2\pi\xi)] \sin(j\pi\xi) d\xi = 0, (j = 1, 2).$$
(97)

Из (97) получаем:  $C_1 = 2$ ;  $C_2 = -2$ .

В третьем приближении  $b_1(q)$ ,  $b_2(q)$ ,  $b_3(q)$  находятся из условий (87) и (8) (при i = 1, 2). Соотношение (88) после их нахождения будет

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi - \frac{\left(36\pi^4(1+q) + 13\pi^2q'' + q''\right)\sin(\pi\xi)}{24\pi^5} - \frac{\left(9\pi^4(1+q) + 10\pi^2q' + q''\right)\sin(2\pi\xi)}{30\pi^5} -$$
(98)

$$-\frac{\left(4\pi^4(1+q)+5\pi^2q'+q''\right)\sin(3\pi\xi)}{120\pi^5}.$$

Подставляя (98) в уравнение (83), находим

$$q''' + 14\pi^2 q'' + 49\pi^4 q' - 36\pi^6 q = 0.$$
<sup>(99)</sup>

Интегрируя (99), получаем

$$q(Fo) = C_1 \exp(-\pi^2 Fo) + C_2 \exp(-4\pi^2 Fo) + C_3 \exp(-9\pi^2 Fo) - 1,$$
(100)

Постоянные интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  находятся из начального условия (84)

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \sin(j\pi\xi) d\xi = 0, (j = 1, 2, 3).$$
(101)

Из (101) получаем  $C_1 = 2$ ;  $C_2 = -2$ ;  $C_3 = 2$ . После определения  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  (98) будет

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \xi - \sum_{k=1}^{3} \frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi} \exp(-k^2 \pi^2 \text{Fo}) \sin(k\pi\xi).$$
(102)

Исходя из формул (91), (96), (102), получаем следующую общую формулу

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \xi - \sum_{k=1}^{n} A_k \exp(-v_k^2 Fo) \sin(v_k \xi),$$
(103)

где  $A_k = 2(-1)^{k-1} / (k\pi); v_k = k\pi; n = 3.$ 

Формула (103) при  $n \to \infty$  совпадает с точным решением (см. [2], формула (45), стр. 103).

### 6. ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Рассмотрим применение изложенного выше метода для получения точного аналитического решения уравнения, описывающего изменение во времени скорости в плоском канале [17]

$$\frac{\partial \upsilon(y,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \upsilon(y,t)}{\partial y^2} + \frac{\Delta p}{\rho l},$$
(104)

где  $\upsilon$  – скорость, m/c; t – время, c; y – поперечная координата, m;  $\Delta p$  – перепад давлений по длине канала,  $\Pi a$ ; l – длина канала, m;  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $m^2/c$ ;  $\rho$  – плотность,  $\kappa c/m^3$ .

Рассмотрим получение решения уравнения (104) для случая, когда в начальный момент времени к неподвижной жидкости прилагается перепад давления, который не изменяется во времени. Краевые условия в данном случае имеют вид

$$v(y,0) = 0,$$
 (105)

$$\partial \upsilon(0,t) / \partial y = 0, \tag{106}$$

$$\upsilon(\delta, t) = 0, \tag{107}$$

где  $\delta$  – половина ширины канала.

Обозначим

$$\eta = y / \delta; Zh = vt / \delta^2, \tag{108}$$

где η – безразмерная координата; *Zh* – число Жуковского.

С учетом (108) задача (104)-(107) будет

$$\frac{\partial \upsilon(\eta, Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial^2 \upsilon(\eta, Zh)}{\partial \eta^2} + \omega, (Zh > 0; 0 < \eta < 1), \tag{109}$$

$$\upsilon(\eta, 0) = 0,$$
 (110)

$$\partial \upsilon(0, Zh) / \partial \eta = 0, \tag{111}$$

$$\upsilon(1,Zh) = 0,$$
 (112)

где  $\omega = \Delta p \delta^2 / (\nu l \rho)$ .

Введем в рассмотрение ДИФ

$$q(Zh) = \upsilon(0, Zh),\tag{113}$$

характеризующую скорость в центре канала.

Решение задачи будем искать в виде

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q) \varphi_k(\eta), \qquad (114)$$

где  $b_k(q)$ ,  $\phi_k(\eta) = \cos(r\pi\eta/2)$  – неизвестные коэффициенты и координатные функции (r = 2k - 1; k = 1, n).

Соотношение (114) удовлетворяет граничным условиям (111), (112). Коэффициенты  $b_k(q)$  находятся из (113) и ДГУ, для получения которых продифференцируем (111), (112) по Zh

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \upsilon(0, Zh)}{\partial Zh} \right) = 0, \tag{115}$$

$$\partial \upsilon(1, Zh) / \partial Zh = 0. \tag{116}$$

Уравнение (109) с учетом (116) приводится к ДГУ

$$\partial^2 \upsilon(1, Zh) / \partial \eta^2 + \omega = 0.$$
(117)

Дифференцируя (109) по  $\eta$ и сравнивая с соотношением (115), для точки  $\eta=0$  находим ДГУ

$$\partial^3 \upsilon(0, Zh) / \partial \eta^3 = 0. \tag{118}$$

Продифференцируем (117), (118) по Zh

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \upsilon(1, Zh)}{\partial Zh} \right) = 0, \tag{119}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \left( \frac{\partial \upsilon(0, Zh)}{\partial Zh} \right) = 0.$$
(120)

$$\partial^4 \upsilon(1, Zh) / \partial \eta^4 = 0, \tag{121}$$

$$\partial^5 \upsilon(0, Zh) / \partial \eta^5 = 0. \tag{122}$$

Аналогично можно получить любое число ДГУ, общие формулы для которых будут

$$\partial^{i} \vartheta(0, Zh) / \partial \eta^{i} = 0, (i = 3, 5, 7, ...),$$
 (123)

$$\partial^{i} \Theta(1, Zh) / \partial \eta^{i} = 0, (i = 4, 6, 8, ...).$$
 (124)

Учитывая, что решение вида (114) удовлетворяет ДГУ (117), (123), (124), коэффициенты  $b_k(q)$ , (k = 1, n) находятся из соотношения (113) и получаемых при его использовании ДГУ. Продифференцируем (113) по *Zh* 

$$\frac{\partial q(Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial \upsilon(0, Zh)}{\partial Zh}.$$
(125)

Сравнивая (125) с уравнением (109), находим следующее ДГУ

$$\frac{\partial q(Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial^2 \upsilon(0, Zh)}{\partial \eta^2} + \omega.$$
(126)

Продифференцируем (126) по переменной Zh

$$\frac{\partial^2 q(Zh)}{\partial Zh^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \upsilon(0, Zh)}{\partial Zh} \right).$$
(127)

Подставляя в (127) правую часть уравнения (109), находим еще одно ДГУ

$$\frac{\partial^2 q(Zh)}{\partial Zh^2} = \frac{\partial^4 \upsilon(0, Zh)}{\partial \eta^4}.$$
(128)

Аналогично можно получить любое их количество, общая формула которых имеет вид

$$\frac{\partial^i q(Zh)}{\partial Zh^i} = \frac{\partial^{2i} \upsilon(0, Zh)}{\partial \eta^{2i}}, (i = 2, 3, 4, \ldots).$$

$$(129)$$

В первом приближении подставляя (114) в (113), находим:  $b_1(q) = q(Zh) - \omega / 2$ . Подставляя  $b_1(q)$  в (114), получаем

$$\upsilon(\eta, Zh) = \omega(1 - \eta^2) / 2 + (q(Zh) - \omega / 2)\cos(\pi\eta / 2).$$
(130)

Потребуем, чтобы (130) удовлетворяло (109) в любой точке  $0 \le \eta < 1$ , исключая  $\eta = 1$ , где уравнение (109) выполняется в предельном смысле. Подставим (130) в (109)

$$8dq(Zh) / dZh + 2\pi^2 q(Zh) - \pi^2 \omega = 0.$$
(131)

Интегрируя (132), находим

$$q(Zh) = C_1 \exp(-\nu_1 Zh), \qquad (132)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования;  $v_1 = -\pi^2 / 4$  – первое собственное число, равное точному его значению [17].

Подставим (132) в (130)

$$\upsilon(\eta, Zh) = \omega(1 - \eta^2) / 2 + C_1 \exp(-\pi^2 Zh / 4) \cos(\pi \eta / 2).$$
(133)

Постоянная C<sub>1</sub> находится из начального условия (110)

$$\int_{0}^{1} \left[ \frac{\omega}{2} (1 - \eta^{2}) + C_{1} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta = 0.$$
 (134)

Из (134) находим:  $C_1(q) = -16\omega / \pi^3$ .

С учетом  $C_1$  (133) принимает вид

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) - \frac{16\omega}{\pi^3} e^{-\frac{\pi^2 Zh}{4}} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right),$$
(135)

Во втором приближении подставим (114) в (113), (126). Для  $b_1(q)$  и  $b_2(q)$  будем иметь два алгебраических линейных уравнения. После определения  $b_1(q)$  и  $b_2(q)$  соотношение (114) будет

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2} (1 - \eta^2) - \frac{9\pi^2 \omega - 8dq(Zh) / dZh - 18\pi^2 q(Zh)}{16\pi^2} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \frac{\pi^2 \omega - 8dq(Zh) / dZh - 2\pi^2 q(Zh)}{16\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right).$$
(136)

Подставим (136) в (109)

$$\frac{32d^2q(Zh)}{dZh^2} + \frac{80\pi^2 dq(Zh)}{dZh} + 18\pi^4 q(Zh) - \omega = 0.$$
 (137)

Интеграл уравнения (137) имеет вид

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) + C_1 e^{-\frac{\pi^2 Zh}{4}} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + C_2 e^{-\frac{9\pi^2 Zh}{4}} \cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right).$$
(138)

Константы интегрирования C<sub>1</sub> и C<sub>2</sub> находятся из начального условия (110)

$$\int_0^1 \left[ \frac{\omega}{2} \left( 1 - \eta^2 \right) + C_1 \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + C_2 \cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right) d\eta = 0, (j = 1, 3).$$
(139)

Из (139) находим:  $C_1(q) = -16\omega / \pi^3$ ;  $C_2(q) = 16\omega / 27\pi^3$ . Соотношение (114) принимает вид

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1-\eta^2) - \frac{16\omega}{\pi^3}e^{-\frac{\pi^2 Zh}{4}}\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) + \frac{16}{27\pi^3}e^{-\frac{9\pi^2 Zh}{4}}\cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right).$$
 (140)

В третьем приближении неизвестные коэффициенты  $b_k(q)$ , (k = 1, 2, 3) находятся из (113), (126), (129) (i = 2). Решение задачи в третьем приближении будет

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1-\eta^2) + \sum_{k=1}^n \frac{16(-1)^k \omega}{r^3 \pi^3} e^{-\frac{r^2 \pi^2 Zh}{4}} \cos\left(\frac{r\pi\eta}{2}\right), (r = 2k-1; n = 3).$$
(141)

Соотношение (141) при  $n \to \infty$  представляет точное решение (109)–(112) [17]

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega e^{-\mu_k^2 Zh} \cos(\mu_k \eta),$$
(142)

где  $A_k = 16(-1)^k / (r^3 \pi^3); \ \mu_k = r\pi / 2; \ r = 2k - 1.$ 

## 7. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ РАСЧЕТА ФРОНТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

В методах, использующих понятие глубины прогретого слоя, вводится допущение о конечной скорости переноса теплоты, несмотря на то что решается параболическое уравнение. В работах [11, 12, 16] показано, что с увеличением числа приближений скорость перемещения фронта возмущения устремляется к бесконечности. Следовательно, получаемое решение подтверждает факт бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой решением параболического уравнения. Таким образом, метод решения параболического уравнения, связанный с использованием понятия фронта температурного возмущения (ФТВ), что эквивалентно допущению о конечной скорости распространения теплоты, имеет определенные ограничения. Они связаны с ограничением скорости перемещения ФТВ. Как только эта скорость становится равной скорости распространения тепловой волны  $v_{\rm T} = \sqrt{a/\tau_r}$ , процесс получения решения можно считать законченным (где а – коэффициент температуропроводности,  $m^2/c$ ;  $\tau_r$  – время релаксации, c). При известной величине времени релаксации скорость тепловой волны ( $\vartheta_{T}$ , M/c) может быть найдена до момента получения решения задачи определения температуры с использованием интегрального метода. Отметим, что учет времени релаксации приводит к гиперболическим уравнениям теплопроводности, включающим производные по времени высокого порядка, а также смешанные производные. Получение их аналитических решений

и расчет температуры при значениях времени, сопоставимых с временем релаксации, затруднительно. Интегральный метод теплового баланса, отличаясь простотой реализации, не имеет ограничений на величину времени, для которого выполняется расчет температуры. В связи с чем, он может использоваться как первый шаг решения гиперболического уравнения теплопроводности до момента времени, когда ФТВ достигает центра пластины.

Идею метода, основанного на использовании понятия фронта термического возмущения, рассмотрим на примере решения следующей краевой задачи для

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}, (Fo > 0; 0 < \xi < 1),$$
(143)

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \tag{144}$$

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = 1, \tag{145}$$

$$\partial \Theta(1, \text{Fo}) / \partial \xi = 0, \tag{146}$$

где  $\Theta = (T - To) / T_{CT} - To);$  Fo =  $a\tau / \delta^2; \xi = x/\delta$ .

Введем в рассмотрение движущуюся границу (фронт температурного возмущения), разделяющую область  $0 \le \xi \le 1$  на две:  $0 \le \xi \le q_1$ (Fo) и  $q_1$ (Fo)  $\le \xi \le 1$ , где  $q_1$ (Fo) – подвижная граница, принимаемая за ДИФ (рис. 5). В области за подвижной границей сохраняется начальная температура. При Fo = Fo<sub>1</sub> первая стадия заканчивается (подвижная граница достигает центра пластины,  $\xi = 1$ ). Во второй стадии изменение температуры происходит во всем объеме тела  $0 \le \xi \le 1$ . Решение параболического и гиперболического уравнений в этой стадии совпадают.

Математическая постановка для первой стадии имеет вид [16]

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2}, (0 < \text{Fo} \le \text{Fo}_1; 0 \le \xi \le q_1(\text{Fo})), \tag{147}$$

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = 1, \tag{148}$$

$$\Theta(q_1, \mathrm{Fo}) = 0, \tag{149}$$

$$\partial \Theta(q_1, \text{Fo}) / \partial \xi = 0.$$
 (150)

В параболическом уравнении (147) заложена бесконечная скорость распространения теплоты. Поэтому понятие фронта возмущения здесь вводится условно. Далее будет показано, что при увеличении числа приближений *n* время Fo<sub>1</sub>, когда фронт температурного возмущения достигает центра пластины, уменьшается и, при  $n \to \infty$  Fo<sub>1</sub>  $\to 0$ . Следовательно, решение задачи (147)–(150) при  $n \to \infty$ будет описывать бесконечную скорость перемещения теплоты. Если найти число приближений *n*, при котором скорость перемещения ФТВ будет совпадать со скоростью тепловой волны  $\vartheta_T$ , то полученное решение будет эквивалентно решению гиперболического уравнения теплопроводности в диапазоне времени  $0 \le Fo \le Fo_1$ . Представим решение задачи (147)-(150) в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k(q_1) \,\varphi_k(\xi),$$
(151)

где  $a_k(q_1)$ , (k = 1, 2, ..., n) – неизвестные коэффициенты;  $\varphi_k(\xi) = \xi^{2k-1}$  – координатные функции.

Решение (151) удовлетворяет условию (148). Подставляя (151) в (149), (150), находим:  $a_1 = -3 / 2q_1$ ;  $a_2 = 1 / (2q_1^3)$ . Соотношение (151) принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k} A_{k} \left(\frac{\xi}{q_{1}}\right)^{2k-1},$$
(152)

где  $A_1 = 1.5$ ;  $A_2 = 0.5$ .

Интеграл теплового баланса уравнения (147) будет

$$\int_{0}^{q_{1}(\text{Fo})} \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} d\xi = \int_{0}^{q_{1}(\text{Fo})} \frac{\partial^{2} \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^{2}} d\xi.$$
(153)

Подставим (152) в (153)

$$q_1 dq_1 = 4d \text{Fo.} \tag{154}$$

Интеграл уравнения (154), с учетом  $q_1(0) = 0$ , имеет вид

$$q_1(\text{Fo}) = \sqrt{8}\text{Fo}.$$
 (155)

Положив  $q_1(Fo_1) = 1$ , находим:  $Fo_1 = 1 / 8 = 0.125$ .



Рис. 5. Схема теплообмена.

Формулы (152), (155) являются решением задачи (147)-(150) во втором приближении.

Анализ расчетов по (152) позволяет заключить, что максимальное расхождение с точным решением [2] наблюдается при Fo = Fo<sub>1</sub> и составляет 9%.

Повышение точности решения связано с использованием ДГУ, определяемых в таком виде, чтобы их выполнение приводило к выполнению уравнения (147) в точках  $\xi = 0$  и  $\xi = q_1$  (Fo). Общие формулы для них имеют вид [16]

$$\partial^{l}\Theta(0, \text{Fo}) / \partial \xi^{l} = 0, (i = 2, 4, 6, 8, ...),$$
 (156)

$$\partial^i \Theta(q_1, \text{Fo}) / \partial \xi^i = 0, (i = 2, 3, 4, 5, ...).$$
 (157)

Очевидно, что, благодаря нечетным степеням переменной  $\xi$  в координатных функциях, соотношение (151) удовлетворяет ДГУ (156) в любом приближении.

В третьем приближении, подставляя (151) в (149), (150), (157) (i = 2), для коэффициентов  $a_k(q_1)$ , (k = 1, 2, 3) имеем цепочную систему трех алгебраических уравнений. Ее решение:  $a = -15 / (8q_1)$ ;  $a_2 = 5 / (8q_1^3)$ ;  $a_3 = -3 / (8q_1^3)$ .

Соотношение (151) принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k} A_{k} \left(\frac{\xi}{q_{1}}\right)^{2k-1},$$
(158)

где  $A_1 = 15 / 8$ ;  $A_2 = 5 / 8$ ;  $A_3 = 3 / 8$ .

Подставим (158) в (153)

$$q_1 dq_1 = 6d \text{Fo.} \tag{159}$$

Интегрируя уравнение (158), с учетом  $q_1(0) = 0$  находим

$$q_1(\text{Fo}) = \sqrt{12}\text{Fo}.$$
 (160)

Приняв  $q_1(\text{Fo}_1) = 1$ , получаем  $\text{Fo}_1 = 1 / 12 \approx 0.083333$ .

В четвертом приближении используются условия (149), (150), (157) (i = 2, 3). Соотношение (151) приводится к виду

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{3} (-1)^k A_k \left(\frac{\xi}{q_1}\right)^{2k-1},$$
(161)

где  $A_1 = 35 / 16$ ;  $A_2 = 35 / 16$ ;  $A_3 = 21 / 16$ ;  $A_4 = 5 / 16$ .

Подставим (161) в (153)

$$q_1 dq_1 = 8d \text{Fo.} \tag{162}$$

Интеграл уравнения (162), при  $q_1(0) = 0$ , будет

$$q_1(\text{Fo}) = \sqrt{16\text{Fo}}.\tag{163}$$

Приняв  $q_1(\text{Fo}_1) = 1$ , находим:  $\text{Fo}_1 = 1 / 16 \approx 0.0625$ .

В пятом приближении получаем

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k} A_{k} \left(\frac{\xi}{q_{1}}\right)^{2k-1},$$
(164)

где  $A_1 = \frac{315}{128}$ ;  $A_2 = \frac{105}{32}$ ;  $A_3 = \frac{189}{64}$ ;  $A_4 = \frac{45}{32}$ ;  $A_5 = \frac{35}{128}$ .

Уравнение для  $q_1(Fo)$  и его решение будут

$$q_1 dq_1 = 10 d \operatorname{Fo},\tag{165}$$

$$q_1(\text{Fo}) = \sqrt{20\text{Fo}}.$$
(166)

При  $q_1(\text{Fo}_1) = 1$  Fo<sub>1</sub> = 1 / 20.

Таким путем можно получить решение в любом приближении. Уравнения для  $q_1$  (Fo) отличаются лишь коэффициентом в правой части, который в каждом последующем приближении увеличивается на две единицы (см. уравнения (154), (159), (162), (165)). Решения уравнения для  $q_1$  (Fo) отличаются лишь коэффициентом под знаком корня, увеличивающимся в каждом последующем приближении на четыре единицы (см. соотношения (155), (160), (163), (166)). Учитывая отмеченные закономерности, можно записать общие формулы уравнений относительно  $q_1$  (Fo) и их решений в зависимости от числа приближений *n* 

$$q_1(\text{Fo})dq_1(\text{Fo}) = 2nd\text{Fo},\tag{167}$$

$$q_1(\text{Fo}) = \sqrt{4n\text{Fo}}.$$
(168)

Общая формула для времени окончания первой стадии, то есть, когда  $q_1(\text{Fo}_1) = 1$ , имеет вид

$$Fo_1 = 1 / (4n).$$
 (169)

Таким образом, при получении решения задачи (147)–(150) в любом приближении требуется найти лишь неизвестные коэффициенты  $a_k(q_1)$ , определяемые из основных (149), (150) и дополнительных (157) граничных условий. Общий вид решения при любом количестве приближений будет

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} A_{k} \left[ \frac{\xi}{q_{1}(\text{Fo})} \right]^{2k-1},$$
(170)

где  $A_k$  – постоянные, определяемые из (149), (150), (157) (при i = 2, 3, 4, 5, ..., n - 1);  $q_1(Fo)$  находится по формуле (168).

Результаты исследований закономерности перемещения фронта температурного возмущения  $q_1$ (Fo) для 2, 3, 5, 20 и 30-го приближений приведены на рис. 6. Их анализ позволяет сделать вывод, что с увеличением числа приближений время (Fo<sub>1</sub>) достижения фронтом возмущения координаты  $\xi = 1$  уменьшается (отметим, что величина Fo<sub>1</sub> в 20-ом и 30-ом приближениях соответственно составляет Fo<sub>1</sub> = 0.025 и Fo<sub>1</sub> = 0.0125). И, в пределе, при  $n \to \infty$  Fo<sub>1</sub>  $\to 0$ , что согласуется с гипотезой о бесконечной скорости распространения теплового возмущения, описываемой уравнением (147), согласно которой сразу после приложения граничного условия  $\Theta(0, \text{Fo}) = 1$  температура во всем диапазоне координаты  $0 \le \xi \le 1$ , включая центр пластины ( $\xi = 1$ ), не совпадает с начальной.

Анализ результатов расчетов для 2, 3, 5, 20, 30-го приближений в сопоставлении с точным решением [2] позволяет заключить, что с увеличением числа приближений решение уточняется, приближаясь к точному. Так уже в 20-ом приближении отличие от точного решения не превышает 1%, а в 30-ом – практически совпадает с ним. Результаты расчетов для сверхмалых величин времени ( $10^{-8} \le \text{Fo} \le 10^{-12}$ ) даны на рис. 7. Следует подчеркнуть трудности нахождения точного решения по формулам из [2] для столь малых величин Фурье из-за необходимости применения большого числа членов ряда. Расчеты показывают, что при Fo =  $10^{-7}$  для обеспечения сходимости точного решения следует использовать 2000 членов ряда (формула (1.16), на стр. 87 из [2]). Для чисел Fo =  $10^{-8}$ ;  $10^{-9}$ ;  $10^{-10}$ ;  $10^{-11}$ ;  $10^{-12}$  сходимость точного решения наступает, соответственно, при следующих числах членов ряда:  $5 \times 10^3$ ;  $1 \times 10^4$ ;  $5 \times 10^4$ ;  $2 \times 10^5$ ;  $5 \times 10^5$ .

Недостатки классических точных аналитических решений параболических уравнений состоят в невозможности описания температуры в начальном диапазоне времени, сопоставимом с временем свободного пробега микрочастиц (носителей энергии — молекул, атомов, электронов, ионов, фононов и др.), а также в нанообъектах (например, нанопленках) с размерами, сопоставимыми с длиной их свободного пробега. Исследование температуры в указанном пространственно-временном



**Рис. 6.** Перемещение фронта теплового возмущения  $q_1$  (Fo). 2, 3, 5, 20, 30 – номер приближения.



**Рис. 7.** Распределение температуры: × − 2-е приближение первой стадии; Δ − 20-е приближение первой стадии; о − точное решение.

диапазоне возможно лишь на моделях, учитывающих конечную скорость распространения теплоты. Такие модели описываются сложными гиперболическими уравнениями теплопроводности, учитывающими пространственно — временную нелокальность реальных физических процессов. Аналитические решения для этих моделей (если их удается получить) включают две компоненты, одна из которых описывает диффузионное распространение теплоты, а вторая — волновое или баллистическое [11, 12]. Их анализ крайне затруднителен и особенно, когда требуется получать решения для малых и сверхмалых значений начального временного участка, сопоставимых со временем релаксации, а также для пластин сверхмалой толщины.

С целью анализа реального изменения температуры на начальном временном участке можно использовать полученное выше решение параболического уравнения для первой стадии, где было введено допущение о конечной скорости распространения теплоты. Известно, что скорость тепловой волны для любой конкретной среды можно найти по формуле [2]

$$\upsilon = \sqrt{a / \tau_r},\tag{171}$$

где  $\tau_r$  – время релаксации, *с*.

Скорость тепловой волны можно также найти из соотношения (169), определяющего безразмерное время окончания первой стадии процесса в любом приближении. Учитывая, что  $Fo_1 = a\tau_1 / \delta^2$ , при известных коэффициенте температуропроводности *а* и толщине пластины  $\delta$  можно найти размерное время окончания первой стадии процесса  $\tau_1$ . Скорость тепловой волны в данном случае определяется по соотношению

$$\upsilon^{*} = \delta / \tau_{1}. \tag{172}$$

Используя соотношение (169), путем изменения числа приближений n, можно найти такое  $Fo_1$ , чтобы скорости  $\upsilon$  и  $\upsilon^*$  совпадали. После определения  $\upsilon^*$  получение последующих приближений представляется нецелесообразным, так как получаемое решение для безразмерной температуры вида (170), приближаясь к точному аналитическому решению параболического уравнения теплопроводности, как уже указывалось выше, не может быть использовано при сверхмалых значениях времени.

#### выводы

1. Выполнены детальные исследования метода получения точных аналитических решений краевых задач, основанного на определении ДИФ и ДГУ. ДИФ позволяет сводить уравнение в частных производных к обыкновенному уравнению, из решения которого находятся собственные числа краевой задачи. Собственные числа в данном случае находятся из временно́го дифференциального уравнения относительно ДИФ в отличие от классических методов, где они определяются из краевой задачи Штурма— Лиувилля, поставленной в пространственной переменной. Следовательно, в настоящей работе рассматривается другое направление определения собственных чисел. ДГУ представляются в таком виде, чтобы их удовлетворение было равносильно удовлетворению исходного дифференциального уравнения в точках границы ( $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ ). Показано, что уравнение в этом случае выполняется и внутри области ( $0 \le \xi \le 1$ ), исключая его интегрирование по пространственной координате.

2. Для получения решений при малых значениях времени используется интегральный метод теплового баланса, основанный на определении фронта температурного возмущения (ФТВ), применяемого в качестве дополнительной искомой функции. Принятие ФТВ означает введение допущения о конечности скорости распространения теплоты, несмотря на то, что решению подлежит параболическое уравнение. Показано, что увеличение числа приближений приводит к возрастанию скорости перемещения ФТВ и при  $n \rightarrow \infty$  она устремляется к бесконечности. Следовательно, факт бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой параболическим уравнением, подтверждается. Сопоставляя решения гиперболического и параболического уравнений, найдено число приближений, при котором их решения совпадают. В связи с чем, для определения температурного состояния конструкций при малых значениях времени можно использовать решение параболического уравнения, полученное на основе ФТВ.

3. Преимуществом методов, основанных на определении ДГУ и ДИФ, является алгебраизация получаемых решений. И, в частности, независимо от вида дифференциальных операторов, включая уравнения для тел с цилиндрической и сферической симметрией, а также нелинейные уравнения, решения не содержат специальных функций (Бесселя, Неймана, Вебера и др.) и включают лишь степенные (или тригонометрические) координатные функции с коэффициентами, экспоненциально стабилизирующимися во времени.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2024-0014) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
- 2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
- 3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
- 4. *Канторович Л.В.* Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Прикл. мат. и механ. 1942. Т. 6. № 1. С. 31–40.
- 5. *Канторович Л.В., Крылов В.И*. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
- 6. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.
- 7. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975. 208 с.
- 8. *Кот В.А.* Метод взвешенной температурной функции // Инженерно–физический журн. 2016. Т. 19. № 1. С. 183–202.
- 9. Глазунов Ю.Т. Вариационные методы. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"; Институт компьютерных исследований. 2006. 470 с.
- Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. Сб. науч. тр. М.: Атомиздат, 1967. С. 41–96.
- 11. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. М.: ИНФРА–М, 2013. 391 с.
- 12. *Кудинов И.В., Еремин А.В., Трубицын К.В., Стефанюк Е.В.* Модели термомеханики с конечной и бесконечной скоростью распространения теплоты. М.: Проспект, 2020. 224 с.
- 13. Карташов Э.М., Кудинов В.А., Калашников В.В. Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. М.: Издательство Юрайт, 2018. 435 с.
- Цой П.М. Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. М: Издательство МЭИ, 2005. 568 с.
- 15. *Фёдоров О.М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000. 220 с.
- 16. Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А. Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций. Сибирский журн. вычислительной математики. Новосибирск, 2019. Т. 22. С. 153–165.
- 17. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.

# Additional Conditions in Boundary Value Problems of Heat Conduction (Review)

V. A. Kudinov<sup>\*</sup>, K. V. Trubitsyn, E. V. Kotova, T. E. Gavrilova, V. K. Tkachev

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation \*e-mail: totig@ yandex.ru

A review of studies related to the use of additional boundary conditions (ADBs) and additional sought functions (ADFs) in obtaining analytical solutions to heat conduction problems is presented. ADBs allow the equation to be executed at the boundaries, which leads to its execution inside the domain, excluding direct integration over the spatial coordinate. ADF allows one to reduce a partial differential equation to an ordinary differential equation, from the solution of which the eigenvalues of the boundary value problem are found. Eigenvalues in classical methods are found from the solution of the Sturm-Liouville boundary value problem formulated in the domain of a spatial variable. Consequently, the method used in this work leads to another algorithm for their determination, based on the solution of a temporary differential equation, the order of which is determined by the number of approximations of the resulting solution. In a problem based on determining the front of a temperature disturbance, the equivalence of solutions to the parabolic and hyperbolic heat equations was found. And, in particular, a number of approximations have been found that limit the speed of propagation of a thermal wave in the solution of a parabolic equation to a value equal to its real value for a specific material, at which it coincides with the solution of the hyperbolic equation.

*Keywords:* boundary value problems, analytical solutions, differential theory, finite speed of heat propagation, temperature disturbance front, parabolic and hyperbolic heat equations

УДК 681.5.017

# АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВИРТУАЛЬНОГО СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА. ЧАСТЬ 2

© 2024 г. А. А. Суворов, А. Б. Аскаров\*, Н. Ю. Рубан, Ю. Д. Бай

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский Томский политехнический университет", Томск, Россия <sup>\*</sup>e-mail: aba7@tpu.ru

> Поступила в редакцию: 22.05.2023 г. После доработки 17.06.2024 г. Принята к публикации 22.06.2024 г.

Увеличение уровня внедрения генерирующих установок на базе возобновляемых источников энергии с применением силовых преобразователей (СП) оказывает непосредственное влияние на динамические свойства современных энергосистем и, как следствие, характер протекания переходных процессов. Одной из основных проблем в таких сетях является значительное изменение величины общей инерции системы в течение времени, что приводит к увеличению скорости изменения частоты и величины ее максимального отклонения при различных возмушениях. Перспективным направлением решения данной проблемы является синтез новых структур систем управления СП на базе виртуального синхронного генератора (ВСГ) с адаптивно изменяющимися параметрами. Результаты исследования в рамках данного направления представлены в статье, которая состоит из двух частей. В первой части обоснована зависимость эффективности функционирования адаптивных алгоритмов управления параметрами ВСГ от используемой структуры. Выполнен сравнительный анализ разработанной модифицированной структуры ВСГ с традиционными алгоритмами и доказаны его принципиальные преимущества. Во второй части статьи представлен анализ влияния параметров модифицированной структуры ВСГ на динамический отклик с помощью переходных характеристик во временной области. На основе полученных результатов разработаны адаптивные алгоритмы независимого управления виртуальной инерцией и параметрами демпферной обмотки ВСГ. Выполненное математическое моделирование полтвердило надежную и эффективную работу разработанных адаптивных алгоритмов управления и модифицированной структуры ВСГ в целом. Из полученных в статье теоретических и экспериментальных результатов следует необходимость одновременного развития и совершенствования адаптивных алгоритмов управления и используемых для этого структур ВСГ.

*Ключевые слова:* возобновляемые источники энергии, виртуальный синхронный генератор, силовой преобразователь, система управления, адаптивное управление, виртуальная инерция

DOI: 10.31857/S0002331024020065

#### введение

В первой части статьи обоснована перспективность развития алгоритмов управления силовым преобразователем (СП) на основе виртуального синхронного генератора (ВСГ) в связи с непостоянством величины постоянной инерции в современных гибридных энергосистемах. Также доказано существование трех принципиальных противоречий для традиционной структуры ВСГ, управляемой напряжением (ВСГ-Н). Первое из них связано с влиянием эффективности демпфирования колебаний на скорость отклика по активной мошности. Второе связано с влиянием демпферного коэффициента на статизм по частоте. Третье противоречие возникает между скоростью реакций на изменение активной мошности и на отклонение частоты. В связи с этим была разработана модифицированная структура ВСГ, управляемая опорным сигналом тока (ВСГ-T), описание которой приведено в первой части статьи. Однако эффективность функционирования ВСГ-Т существенно зависит от параметров настройки, поэтому необходимо осуществлять их адаптивное изменение в зависимости от изменяющихся схемно-режимных условий в гибридных энергосистемах. В настоящее время в качестве модернизации ВСГ предлагаются различные подходы к разработке алгоритмов адаптивной виртуальной инерции. Подобное становится возможным в связи с отсутствием привязки ВСГ к параметрам конкретной синхронной машины. Одним из первых решений в данной области является система управления ВСГ с альтернативным моментом инерции, где осуществлялось изменение виртуальной инерции в уравнении движения с помощью двухпозиционного управления [1]. Подобный подход позволил не только улучшить демпфирование колебаний, но и увеличить устойчивость энергосистемы. Однако в данном случае при отклонении частоты происходит изменение виртуальной инерции только до максимальной или минимальной величины. С целью снижения количества избыточных управляющих воздействий предлагается использовать дополнительное значение виртуальной инерции при двухпозиционном управлении, а также даны соответствующие рекомендации по выбору параметров настройки [2]. Также разработан модифицированный гибридный алгоритм адаптивного управления виртуальной инерцией с помощью двухпозиционного управления [3]. Стоит отметить, что алгоритмы, основанные на подобном принципе, являются достаточно простыми в реализации. Однако при этом всегда используется максимальная доступная энергия из-за дискретного изменения величины виртуальной инерции, что может приводить к нежелательным колебаниям параметров относительно установившегося значения. Для нивелирования данного аспекта в систему управления неизбежно добавляются зоны нечувствительности для контролируемых параметров. Как следствие, при функционировании алгоритма возникает задержка, напрямую зависящая от границ зоны нечувствительности.

Преобладающим направлением по улучшению адаптивного управления ВСГ стало также изменение демпферного коэффициента в темпе переходного процесса [4]. За счет скоординированного управления виртуальной инерцией и демпферным коэффициентом обеспечивается наибольшая эффективность демпфирования колебаний [5] и улучшается регулирование частоты параллельно работающих установок с СП [6]. В основном все подходы по совместному адаптивному управлению двумя обозначенными параметрами базируются на определении оптимального коэффициента затухания [7, 8]. Учитывая недостатки двухпозиционного управления, предлагаются и другие подходы по адаптивному изменению постоянной инерции. Например, предложено ее изменение в соответствии с нелинейной функцией [9], сформулированной только на основе отклонения частоты вращения виртуального ротора. Для уменьшения влияния адаптивной инерции на отклик ВСГ при изменении уставки по активной мощности предложена логика управления с применением нелинейной функции и адаптивным весовым коэффициентом [10]. Также для адаптивной инерции вместо контроля частоты предлагается использовать отклонение активной мощности [11]. Несмотря на различные решения в данной области, задача эффективного адаптивного управления параметрами ВСГ остается нерешенной.

Во второй части статьи для адаптивного управления виртуальной инерцией ВСГ-Т разработан алгоритм, основанный на нелинейной сигмоидальной функции. Благодаря этому стал возможен гибкий контроль величины инерции по превышению уставки по скорости изменения частоты на всем протяжении переходного процесса, уменьшилось потребление энергии со стороны цепи постоянного тока при малых отклонениях частоты без негативного влияния на общий характер переходного процесса. Подобные возможности управления являются труднореализуемыми в случае применения распространенных алгоритмов на основе двухпозиционного управления. Для адаптивного управления параметрами виртуальной демпферной обмотки ВСГ-Т в качестве контролируемого сигнала используется виртуальный ток демпферной обмотки. Такое решение позволяет улучшить демпфирующие свойства ВСГ, и при этом исключается влияние на уравнение движения виртуального ротора и формируемый за счет него отклик по активной мощности и статизм регулирования по частоте. На основе диаграммы Вышнеградского сформированы условия для переключения между парами значений постоянной времени и индуктивности виртуальной демпферной обмотки с учетом быстродействия и сохранения высоких демпфирующих свойств системы, что способствует улучшению инерционного отклика СП и профиля изменения частоты в целом.

# 1. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНЕРЦИИ И ДЕМПФИРОВАНИЯ НА ДИНАМИЧЕСКИЙ ОТКЛИК ВСГ-Т

При разработке алгоритма для адаптивного изменения параметров ВСГ-Т необходимо понимать характер влияния данных параметров на динамический отклик системы. Поэтому для интуитивного понимания получаемых закономерностей удобно использовать переходные функции во временной области. В связи с этим запишем замкнутую передаточную функцию частоты виртуального генератора  $\Delta \omega_{\rm BCF}$  от входной активной мощности  $\Delta P_{\rm ycr}$  (1) и применим к ней обратное преобразование Лапласа (2):

$$G_{\omega/P}BC\Gamma - T(p) = \frac{\Delta\omega_{BC\Gamma}}{\Delta P_{ycm}} = \frac{X_{C_{\phi}L_c}L_cp(\tau_{1q}p+1)}{ap^3 + bp^2 + cp + d},$$
(1)

$$\Delta\omega_{\rm BC\Gamma}(t) = \frac{e^{-\zeta\theta}\sinh(\varepsilon\theta)(T_2k_1 - QT_2k_1\zeta + Qk_2 - \zetak_2) - \varepsilon\left[e^{-\theta/Q} - e^{-\zeta\theta}\cosh\varepsilon\theta\right](k_2 - k_1QT_2)}{T_2^2\varepsilon\left(Q^2 - 2\zeta Q + 1\right)}$$
(2)

где 
$$\varepsilon = \sqrt{\zeta^2 - 1}, = t \cdot \omega_n, T_2 = 1/\omega_n, k_2 = X_{C_{\phi}L_c}L_c \tau_{1q}, k_1 = X_{C_{\phi}L_c}L_c.$$

При возникновении возмущений реакция ВСГ-Т аналогична поведению традиционного СГ и описывается хорошо известной угловой характеристикой мощности [6]. На данной характеристике принято выделять четыре характерных этапа, возникающих при возмущении: первый и третий связаны с ускорением виртуального ротора, второй и четвертый с его торможением [1]. Переход от одного этапа к другому легко определяется путем сравнения с нулем отклонения угловой частоты ВСГ  $\Delta \omega_{BCF}$ , скорости отклонения  $d\omega_{BCF}/dt$  и их произведения [8]. Каждому из этих этапов соответствует своя цель адаптивного управления.

Исходя из используемого уравнения движения в ВСГ-Т, следует, что постоянная инерции  $H_{\rm BC\Gamma}$  обратно пропорциональна скорости изменения угловой частоты  $d\omega_{\rm BC\Gamma}/dt$ . Следовательно, на этапе ускорения для уменьшения величины отклонения частоты и снижения скорости отклонения требуется большая величина постоянной инерции  $H_{\rm BC\Gamma}$ . Напротив, на этапе торможения величина отклонения угловой частоты максимальна и требуется малое значение постоянной инерции, чтобы как можно быстрее вернуть угловую частоту к установившемуся значению. На рис. 1 приведены переходные характеристики для уравнения (2) при разных значениях  $H_{\rm BC\Gamma}$ , которые полностью подтверждают сделанные выводы и определяют цель адаптивного изменения виртуальной постоянной инерции  $H_{\rm BC\Gamma}$  на каждом из обозначенных этапов.

Как было обозначено ранее, для разработанной структуры ВСГ-Т степень демпфирования зависит от двух коэффициентов: постоянной времени  $\tau_{1q}$  и индуктивного сопротивления  $L_{1q}$  виртуальной демпферной обмотки. Их влияние на динамический



Рис. 1. Переходная характеристика отклонения угловой частоты при разных значениях постоянной инерции.

отклик определяется характеристическим уравнением передаточной функции  $G_{\omega/P\_BCT-T}(p)$ , которое является многочленом третьей степени. Рассмотрим данное уравнение на плоскости с координатами в виде параметров *A* и *B* (рис. 2), через которые выражаются  $\tau_{1a}$  (3) и  $L_{1a}$  (4):

$$\tau_{1q} = \sqrt[3]{\frac{B^3 2H_{BC\Gamma} \left(L_{\nu} + L_c X_{C_{\phi}L_c}\right)}{U_2 X_{C_{\phi}L_c} \omega_6}},$$
(3)

$$L_{1q} = -L_{\nu} - L_{c}X_{C_{\phi}L_{c}} + A_{\chi}^{3} \frac{\tau_{1q}^{2} \left(L_{\nu} + L_{c}X_{C_{\phi}L_{c}}\right) U_{2}X_{C_{\phi}L_{c}}\omega_{6}}{2H_{BC\Gamma}}.$$
(4)

Основная задача демпферного контура заключается в обеспечении эффективного демпфирования колебаний и устойчивости системы в целом. Исходя из этой задачи, осуществляется адаптивное управление в рамках традиционной структуры ВСГ-Н [12]. Однако за счет предложенной модифицированной структуры ВСГ-Т удалось увеличить степень свободы системы, и за счет изменения уже двух параметров, связанных с демпфированием, можно влиять на еще одну динамическую характеристику системы, тем самым существенно улучшая качество переходного процесса. В связи с этим на этапе vскорения помимо повышения демпфирования необходимо снизить время нарастания, что способствует уменьшению максимальной величины отклонения и скорости изменения частоты. Для этого следует выбирать точку в области ЕСГ, внутри которой всегда выполняется условие  $\zeta \ge 1$  (рис. 2). Ограничение времени нарастания достигается путем уменьшения постоянной времени апериодического звена  $T_1$ , что соответствует отдалению вещественного корня  $\rho = -1/T_1$  характеристического уравнения (1) от мнимой оси. При этом вещественный корень должен располагаться левее комплексно-сопряженных корней на комплексной плоскости, что соответствует области I на рис. 2. В соответствии с обозначенными условиями на диаграмме Вышнеградского в координатах A, B движению вещественного корня влево соответствует движение вправо линий равных наибольших значений модуля наиболее удаленного от мнимой оси корня, которые в координатах A, B описываются следующим уравнением (5)

$$B = 1 / \rho + A\rho - \rho^2.$$
<sup>(5)</sup>

На этапе торможения при сохранении степени демпфирования  $\zeta \ge 1$  необходимо обеспечить высокую скорость затухания переходного процесса, что будет соответствовать быстрому возращению угловой частоты ротора к установившемуся значению. Для этого необходимо увеличение абсолютного значения вещественной части комплексно-сопряженных корней, что соответствует линиям равной степени быстродействия (η) в координатах *A*, *B* (рис. 2) и описывается следующей системой уравнений (6)

$$\begin{cases} B = A\eta - \eta^{2} + 1 / \eta \\ B = 1 / (A - 2\eta) + 2\eta (1 - 2\eta) \end{cases}$$
 (6)

Сделанные предположения о влиянии параметров на динамический отклик системы подтверждаются полученными переходными характеристиками во временной



Рис. 2. Диаграмма Вышнеградского в координатах *A*, *B* с линиями равных наибольших значений модуля, наиболее удаленного от мнимой оси корня (ρ) и равного быстродействия (η).

области для выражения (2). На рис. За представлены две точки с разными интересуемыми значениями A и B. Переходные характеристики на рис. Зб доказывают, что выбор точки № 2 на линии CF, соответствующей большему значению  $\rho$ , позволяет добиться меньшей величины и скорости отклонения частоты вращения ВСГ, что является целью адаптивного управления на этапе ускорения.



**Рис. 3.** (а) точки  $\mathbb{N}$  1 и  $\mathbb{N}$  2 на плоскости в осях *A*, *B*, отличающиеся значением  $\rho$ ; (б) переходные характеристики отклонения угловой частоты, соответствующие координатам точек  $\mathbb{N}$  1 и  $\mathbb{N}$  2 и рассматриваемые на этапе ускорения.



**Рис. 4.** (а) точки  $\mathbb{N}$  1 и  $\mathbb{N}$  2 на плоскости в осях *A*, *B*, отличающиеся значением  $\eta$ ; (б) переходные характеристики отклонения угловой частоты, соответствующие координатам точек  $\mathbb{N}$  1 и  $\mathbb{N}$  2 и рассматриваемые на этапе торможения.

На рис. 4а показаны точки № 1 и № 2, характерные для этапа торможения. Переходная характеристика во временной области на рис. 4б доказывает, что выбор точки № 2 с большим η способствует более быстрому возращению угловой частоты к установившемуся значению. Таким образом, выбирая необходимые значения A и B и соответствующие им  $\tau_{1q}$  и  $L_{1q}$  на каждом из этапов переходного процесса, удается получить желаемые характеристики динамического отклика разработанной структуры ВСГ-Т.

### 2. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ВИРТУАЛЬНОЙ ИНЕРЦИЕЙ

В соответствии с приведенными ранее логикой и целями адаптивного управления параметрами ВСГ в данном разделе описывается предлагаемая реализация адаптивного алгоритма изменения виртуальной инерции, который основан на нелинейной сигмоидальной функции (7)

$$H_{\rm BC\Gamma} = \left(H_0 - \frac{H_0 k_{H1}}{2}\right) + \frac{H_0 k_{H1}}{1 + \exp\left[-k_{H2}\left[\frac{df_{\rm BC\Gamma}}{dt}\left(\Delta f_{\rm BC\Gamma} + k_{H3} k_{H4}\left|\frac{df_{\rm BC\Gamma}}{dt}\right|\right)\right]\right]},\tag{7}$$

где  $H_0$  – постоянная инерции ВСГ в нормальном установившемся режиме, с;  $\Delta f_{BC\Gamma} = f_{BC\Gamma} - f_0$  – отклонение текущей частоты ВСГ  $f_{BC\Gamma}$  от номинального значения  $f_0$ , где  $f_{BC\Gamma} = \omega_{BC\Gamma}/2\pi$ , Гц;  $df_{BC\Gamma}/dt$  – скорость изменения частоты ВСГ, Гц/с;  $k_{H1-H4}$  – коэффициенты адаптивной функции.

Величина  $H_0$  задается на основании максимально допустимого значения инерции ВСГ  $H_{\text{max}}$ , которое определяется зарядной емкостью конденсатора в цепи постоянного тока (8), и рассчитывается в соответствии с уравнением (9):

$$H_{\rm max} = \frac{C_{DC} U_{DC}^2}{2S_{\rm HOM}},\tag{8}$$

$$H_0 = 0.5H_{\rm max},$$
 (9)

где  $C_{DC}$  – емкость конденсатора в цепи постоянного тока,  $\Phi$ ;  $U_{DC}$  – номинальное напряжение цепи постоянного тока, B;  $S_{HOM}$  – номинальная мощность СП, BA.

При этом минимальное значение инерции ВСГ  $H_{\min}$  также должно жестко ограничиваться величиной близкой к нулю (например,  $H_{\min} = 0.01$  с) для недопущения деления на нуль в уравнении движения ВСГ.

Коэффициент  $k_{H1}$  определяет, в каких диапазонах будет изменяться  $H_{BC\Gamma}$  при возмущениях с возможностью учета скорости изменения частоты  $df/dt_{ycr}$ . Данный коэффициент определяется на основе кубической функции (10)

$$k_{H1} = \begin{cases} 2 \begin{pmatrix} H_{\max} \\ H_0 \end{pmatrix} - 1 \\ a_H + b_H c_H \begin{pmatrix} df_{BC\Gamma} \\ dt \end{pmatrix}^3 , \\ 2 \begin{pmatrix} 1 - H_{\max} \\ H_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

если 
$$a_H + b_H c_H \left( \frac{df_{BC\Gamma}}{dt} \right)^3 > 2 \left( \frac{H_{max}}{H_0} - 1 \right),$$
  
если  $2 \left( 1 - \frac{H_{max}}{H_0} \right) \le a_H + b_H c_H \left( \frac{df_{BC\Gamma}}{dt} \right)^3 \le 2 \left( \frac{H_{max}}{H_0} - 1 \right),$  (10)  
если  $a_H + b_H c_H \left( \frac{df_{BC\Gamma}}{dt} \right)^3 < 2 \left( 1 - \frac{H_{max}}{H_0} \right).$ 

В уравнении (10) коэффициент  $a_H$  определяет начальное значение коэффициента  $k_{H1}$ , когда скорость изменения частоты равна или близка к нулю. Таким образом формируется начальный диапазон  $[H_{max};H_{min}]$  для изменения постоянной инерции ВСГ  $H_{BC\Gamma}$ . Значение коэффициента  $a_H$  выбирается в следующем диапазоне (11)

$$1 \le a_H \le 2 \left( \frac{H_{\max}}{H_0} - 1 \right). \tag{11}$$

Коэффициент  $b_H$  определяет знак кубической функции на основании отклонения частоты ВСГ (12), что необходимо для корректной работы алгоритма на разных стадиях переходного процесса:

$$b_H = \operatorname{sign}(f_{\mathrm{BC}\Gamma} - f_0). \tag{12}$$

Коэффициент  $c_H$  позволяет изменять форму функции для  $k_{H1}$  с учетом заданной уставки  $df/dt_{ycr}$ , измеряемой в Гц/с, что позволяет в алгоритме адаптивной инерции ВСГ также учитывать ограничения по скорости изменения частоты на всем

протяжении переходного процесса. Значение данного коэффициента определяется согласно (13)

$$c_{H} = \begin{cases} \frac{2\left(\frac{H_{\max}}{H_{0}} - 1\right) - a_{H}}{df/dt_{\text{уст}}^{3}} & \text{если } k_{H1} \ge a_{H} \\ \frac{a_{H} - 2\left(1 - \frac{H_{\max}}{H_{0}}\right)}{df/dt_{\text{уст}}^{3}} & \text{если } k_{H1} < a_{H} \end{cases}$$
(13)

Также в предлагаемом алгоритме подразумевается возможность исключения контроля скорости изменения частоты путем задания большой величины уставки  $df/dt_{ycr}$ . В таком случае диапазон изменения  $H_{BC\Gamma}$  определяется только коэффициентом  $a_H$  в уравнении (10).

В результате график изменения коэффициента  $k_{H1}$  в зависимости от величины скорости изменения частоты приведен на рис. 5, где кривая 1 соответствует случаю, когда  $\Delta f_{\rm BC\Gamma} \ge 0$ , а кривая  $2 - \Delta f_{\rm BC\Gamma} < 0$ . При этом, поскольку коэффициент  $k_{H1}$  может быть как больше, так и меньше нуля, сигмоидальная функция для управления виртуальной инерцией ВСГ может принимать два вида (кривая 1 при  $k_{H1} \ge 0$ , кривая 2 при  $k_{H1} < 0$ ), как показано на рис. 6.

В приведенном уравнении (7) для адаптивной виртуальной инерции коэффициенты  $k_{H2}$ ,  $k_{H3}$  и  $k_{H4}$  являются вспомогательными для улучшения динамического отклика СП при переходном процессе. Коэффициент  $k_{H2}$  необходим для повышения чувствительности алгоритма адаптивной инерции на этапе демпфирования колебаний за счет изменения крутизны сигмоидальной функции. Данный коэффициент определяется по уравнению (14)

$$k_{H2} = d_{H} + \left[ -m_{H} + \frac{2m_{H}}{1 + \exp(-n_{H} \left| \Delta f_{BC\Gamma} \right|)} \right].$$
(14)

Коэффициент  $d_H$  определяет начальное значение коэффициента  $k_{H2}$  и, соответственно, начальную крутизну сигмоиды (7). Данная крутизна в целом определяет



**Рис. 5.** График изменения коэффициента  $k_{H1}$ .



Рис. 6. График изменения виртуальной инерции ВСГ.

реакцию системы на величину отклонения  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$  и  $df_{\rm BC\Gamma}/dt$ . Когда наступает процесс демпфирования колебаний, то управление виртуальной инерцией по сигмоиде может быть недостаточно чувствительным в сравнении с классическим двухпозиционным управлением. В связи с этим увеличение крутизны сигмоиды в зависимости от  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$ , как видно из (14), позволяет улучшить процесс демпфирования, когда отклонения частоты еще достаточно большие, но при этом не приводить к нежелательным изменениям инерции ВСГ  $H_{\rm BC\Gamma}$ , когда происходят малые отклонения параметров режима. Следовательно, коэффициент  $m_H$  задает степень увеличения коэффициента  $k_{H2}$  при больших отклонениях частоты. Коэффициент  $n_H$  определяет крутизну характеристики для коэффициента  $k_{H2}$ . Таким образом задается величина чувствительности  $k_{H2}$  к отклонениям частоты  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$ . В результате график функции для изменения коэффициента  $k_{H2}$  показан на рис. 7.

Применение в уравнении (7) зависимости виртуальной инерции от сложной комбинации параметров  $\Delta f_{BC\Gamma}$  и  $df_{BC\Gamma}/dt$  в отличие от традиционного подхода, где используется только их перемножение [13], обуславливается необходимостью исключения излишнего изменения инерции ВСГ  $H_{BC\Gamma}$  до  $H_0$  при прохождении отклонения частоты  $\Delta f_{BC\Gamma}$  через нуль. Последнее может приводить к нежелательному резкому увеличению скорости изменения частоты в указанные моменты, как показано на рис. 8.

Подобная ситуация может возникать, когда происходит ограничение скорости изменения частоты на стадии восстановления, вследствие чего значение инерции  $H_{\rm BC\Gamma}$  становится больше  $H_0$ . При традиционном подходе без возможности ограничения скорости изменения частоты в алгоритме адаптивной виртуальной инерции изменение знака  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$  всегда сопровождается изменением инерции BCГ с маленького значения ( $H_{\rm BC\Gamma} < H_0$ ) до большого значения ( $H_{\rm BC\Gamma} > H_0$ ) [7]. В предлагаемом алгоритме в указанном случае необходимо при текущем большом значении инерции остаться на значении, большем чем  $H_0$ , без излишнего снижения инерции до  $H_0$ , т.к., если  $\Delta f_{\rm BC\Gamma} = 0$  и  $k_{H3} = k_{H4} = 0$ , то  $H_{\rm BC\Gamma} = H_0$  в соответствии с (7). Подобной работы алгоритма адаптивной инерции можно достигнуть при использовании вместе с  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$  дополнительного слагаемого в виде  $df_{\rm BC\Gamma}/dt$ , где коэффициент  $k_{H3}$  формирует необходимый знак слагаемого (15), а весовой коэффициент  $k_{H4}$  определяет уровень его влияния (16):



Рис. 7. График изменения коэффициента  $k_{H2}$ .



**Рис. 8.** Влияние изменения инерции ВСГ на скорость изменения частоты при разных вариантах реализации сигмоидальной функции.

$$k_{H3} = \operatorname{sign}(f_{\mathrm{BC\Gamma}} - f_0), \tag{15}$$

$$k_{H4} = \frac{df_{\rm BC\Gamma}/dt}{df_{\rm BC\Gamma}/dt^2 + \Delta f_{\rm BC\Gamma}^2 + 1}.$$
 (16)

Таким образом за счет  $k_{H3}$  прибавка к  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$  в виде  $df_{\rm BC\Gamma}/dt$  будет совпадать по знаку с текущим значением величины  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$ , что не будет приводить к расхождению в алгоритме работы адаптивной инерции ВСГ. Изменение коэффициента  $k_{H4}$  в зависимости от величины  $df_{\rm BC\Gamma}/dt$  и  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$  демонстрирует рис. 9. При приближении величины  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$  к нулю, если при этом  $df_{\rm BC\Gamma}/dt$  имеет достаточно большое значение, то коэффициент  $k_{H4} > 0$ , и будет осуществляться прибавка  $df_{\rm BC\Gamma}/dt$  к  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$ , что позволяет исключить обнуление показателя степени экспоненты у рассматриваемой сигмоидальной функции (7) при  $\Delta f_{\rm BC\Gamma} = 0$ . При больших отклонениях  $\Delta f_{\rm BC\Gamma}$  скорость изменения частоты  $df_{\rm BC\Gamma}/dt$  стремится к нулю, следовательно, коэффициент  $k_{H4}$  также будет стремиться к нулю и не влияет на работу алгоритма.

Резюмируя вышеизложенное, принцип работы предлагаемого алгоритма адаптивной виртуальной инерции представлен на рис. 10 и 11. При возникновении отклонения частоты ВСГ ( $\Delta f_{BCF} > 0$ ) и увеличения скорости ее изменения ( $df_{BCF}/dt > 0$ ) до момента превышения уставки  $df/dt_{ver}$  происходит закономерное увеличение



Рис. 9. Характер изменения коэффициента k<sub>н4</sub>.



Рис. 10. Принцип работы алгоритма адаптивной инерции ВСГ.

виртуальной инерции ( $H_{BC\Gamma} > H_0$ ) и коэффициента  $k_{H1}$  (точки  $a \rightarrow a_1$  на рис. 10). Последнее позволяет увеличить диапазон изменения  $H_{BC\Gamma}$ , что способствует уменьшению величины отклонения частоты и скорости ее изменения. Далее  $H_{BC\Gamma}$  равняется  $H_{max}$ , как и  $k_{H1}$  равняется своему заданному максимальному значению до тех пор,



Рис. 11. Характер изменения виртуальной инерции при изменении частоты.

пока  $df_{BCF}/dt$  не станет меньше значения уставки  $df/dt_{ver}$   $(a_1 \rightarrow a_2)$ . После указанного момента  $k_{H1}$  начинает уменьшаться со снижением  $df_{BCF}/dt$ , что уменьшает диапазон изменения  $H_{\text{BC}\Gamma}$  и, как следствие, текущее значение виртуальной инерции ( $a_2 \rightarrow b$ ). Следующим этапом является восстановление частоты, в связи с чем происходит снижение инерции ВСГ до минимального значения ( $H_{\rm RCT} < H_0$ ). Однако, поскольку при снижении инерции увеличивается скорость изменения частоты, то с целью ее ограничения до уставки  $df/dt_{vcr}$  происходит уменьшение коэффициента  $k_{H1}$  и смена его знака ( $b \rightarrow b_1$ ). Таким образом  $H_{BC\Gamma}$  начинает увеличиваться. В результате может наблюдаться некоторое превышение уставки *df/dt*<sub>ver</sub> по причине достижения максимальных возможностей регулирования СП. По аналогии с ранее сказанным, H<sub>BCC</sub> остается равным  $H_{\text{max}}$ , как и  $k_{H1}$  равняется своему заданному минимальному значению, до тех пор, пока  $df_{BC\Gamma}/dt$  не станет меньше значения уставки  $df/dt_{vcr}$   $(b_1 \rightarrow c)$ . После смены знака  $\Delta f_{\rm BCT} < 0$  осуществляется закономерное увеличение коэффициента  $k_{H1}$  до максимального значения по причине необходимости работы с  $H_{BC\Gamma} > H_0$  на данном этапе переходного процесса. Далее  $k_{H1}$  начинает уменьшаться, что последовательно уменьшает  $H_{\text{BCF}}(c \rightarrow d)$ . При смене знака  $df_{\text{BCF}}/dt > 0$  происходит снижение величины  $H_{BC\Gamma}$  ( $H_{BC\Gamma} \le H_0$ ). Однако с целью недопущения превышения уставки  $df/dt_{\rm vcr}$  коэффициент  $k_{H1}$  начинает изменяться в зависимости от контролируемого значения  $df_{BC\Gamma}/dt$ , что может приводить к обратному увеличению инерции  $H_{BC\Gamma}$ (*d*→*e*). Описанный процесс продолжается до достижения номинальной частоты ВСГ. В табл. 1 приведена обобщенная информация по работе предлагаемого алгоритма.

# 3. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ Параметрами демпферной обмотки

С целью достижения максимальной эффективности функционирования ВСГ-Т при возникновении отклонений частоты сети помимо адаптивного управления виртуальной инерцией также предлагается адаптивное изменение параметров виртуальной демпферной обмотки ( $\tau_{1q}$  и  $L_{1q}$ ). Принцип работы предлагаемого адаптивного

| Этап                  | Знак $\Delta f_{BC\Gamma}$ | Знак<br>df <sub>всг</sub> /dt | $df_{BC\Gamma}/dt$<br>< > $df/dt_{ycT}$ | Характер k <sub>H1</sub>              | Характер Н <sub>всг</sub>   |
|-----------------------|----------------------------|-------------------------------|---|---------------------------------------|---|
| $a \rightarrow a_1$   | > 0                        | > 0                           | < df/dt <sub>yct</sub>                  | k <sub>H1</sub> ↑ > 1<br>(кривая 1)*  | <i>H</i> <sub>ВСГ</sub> ↑ > <i>H</i> <sub>0</sub><br>(кривая 1)** |
| $a_1 \rightarrow a_2$ | > 0                        | > 0                           | $> df/dt_{ycr}$                         | k <sub>H1</sub> = max<br>(кривая 1)   | H <sub>всг</sub> = max<br>(кривая 1)                              |
| $a_2 \rightarrow b$   | > 0                        | > 0                           | $< df/dt_{yct}$                         | $k_{H1}$ ↓ > 1<br>(кривая 1)          | <i>H</i> <sub>ВСГ</sub> ↓ > <i>H</i> <sub>0</sub><br>(кривая 1)   |
| $b \rightarrow b_1$   | > 0                        | < 0                           | < df/dt <sub>yct</sub>                  | $k_{H1} \downarrow < 0$<br>(кривая 1) | Н <sub>ВСГ</sub> ↑ > Н <sub>0</sub><br>(кривая 2)                 |
| $b_1 \rightarrow c$   | > 0                        | < 0                           | > df/dt <sub>yct</sub>                  | k <sub>H1</sub> = min<br>(кривая 1)   | H <sub>всг</sub> = max<br>(кривая 2)                              |
| С                     | < 0                        | < 0                           | > df/dt <sub>yct</sub>                  | k <sub>H1</sub> = max<br>(кривая 2)   | H <sub>всг</sub> = max<br>(кривая 1)                              |
| $c \rightarrow d$     | < 0                        | < 0                           | $< df/dt_{yct}$                         | k <sub>н1</sub> ↓ > 1<br>(кривая 2)   | <i>H</i> <sub>ВСГ</sub> ↓ > <i>H</i> <sub>0</sub><br>(кривая 1)   |
| d→e                   | < 0                        | > 0                           | < df/dt <sub>yct</sub>                  | $k_{H1} \downarrow < 0$<br>(кривая 2) | <i>H</i> <sub>ВСГ</sub> ↑ > <i>H</i> <sub>0</sub><br>(кривая 1)   |

Таблица. Этапы работы предложенного алгоритма адаптивной виртуальной инерции для ВСГ-Т

\* – на рис. 10.

\*\* – на рис. 11.

алгоритма основывается на изменении коэффициентов A и B в уравнениях (3) и (4), используемых для определения необходимых значений  $\tau_{1a}$  и  $L_{1a}$ . Выбор конкретных коэффициентов А и В для достижения необходимого динамического отклика осуществляется исходя из теоретического анализа, приведенного ранее. В нормальном режиме с целью обеспечения высоких запасов устойчивости и уровня демпфирования колебаний ( $\zeta \approx 1$ ), а также быстродействия системы ( $\eta \approx 1$ ) оптимальным решением является нахождение в точке с коэффициентами A = 3 и B = 3. При возникновении отклонения частоты ВСГ для обеспечения наименьшего значения *df*<sub>вст</sub>/*dt* на первом этапе переходного процесса следует снизить быстродействие системы, но при этом также обеспечить высокий уровень демпфирования и запасов устойчивости. Для достижения указанных свойств необходимо двигаться вправо по кривой *CF* (рис. 2), например, к точке с координатами A = 25 и B = 9. После этого с целью снижения величины максимального отклонения частоты ВСГ при условии быстрого восстановления частоты до номинального значения с сохранением высокого уровня демпфирования и наименьшего перерегулирования эффективным является перемещение вправо по кривой CG (рис. 2) в область апериодических процессов с коэффициентом затухания  $\zeta$  больше 1 (например, A = 4 и B = 4).

Условия переключения между выбранными парами коэффициентов *A* и *B* определяются на основании изменения тока виртуальной демпферной обмотки, который рассчитывается в соответствии с (17)
$$i_{1q} = -\frac{1}{\omega_0 R_{1q}} \frac{d\psi_{1q}}{dt} = -\frac{\tau_{1q}}{L_{1q}} \frac{d\psi_{1q}}{dt}.$$
(17)

Применение тока демпферной обмотки позволяет управлять откликом СП на протяжении всего переходного процесса, поскольку ток демпферной обмотки отличен от нуля только при переходном процессе. Однако для того, чтобы реализовать корректное изменение  $\tau_{1q}$  и  $L_{1q}$  на разных этапах переходного процесса, также не-обходимо контролировать знак изменения частоты ВСГ  $\Delta f_{BC\Gamma}$ . Последнее поясняют графики переходного процесса, представленные на рис. 12. В нормальном установившемся режиме (диапазон I на рис. 12) при  $\Delta f_{BC\Gamma} = i_{1q} = 0$  коэффициенты A и B в уравнениях (3) и (4) равны своим начальным значениям (A = 3 и B = 3). При возмущении в случае увеличения частоты ВСГ  $\Delta f_{BCC} > 0$  (кривая 1) на начальном этапе переходного процесса (диапазон II на рис. 12) сначала происходит резкое увеличение тока демпферной обмотки и затем его снижение до нуля, при этом  $i_{1a} < 0$ . В противоположном случае, когда после возмущения  $\Delta f_{BCT} < 0$  (кривая 2), наблюдается обратная ситуация  $-i_{1a} > 0$ . Таким образом контролирование только одного из параметров не позволяет обеспечить адекватные условия переключения между парами коэффициентов А и В. Последнее определяется тем, что в обоих случаях, как при снижении, так и при увеличении частоты, необходимо снизить быстродействие системы и тем самым уменьшить величину скорости изменения частоты с помощью перехода к значениям A = 25 и B = 9. На следующем этапе переходного процесса (диапазон III на рис. 12) при смене знака тока  $i_{1q}$  становится возможным переключение на другую пару коэффициентов A = 4 и B = 4 с целью уменьшения величины максимального отклонения частоты и дальнейшего быстрого восстановления ее значения ло номинального.

В результате алгоритм изменения значений коэффициентов A и B и, соответственно, параметров виртуальной демпферной обмотки  $\tau_{1q}$  и  $L_{1q}$  выглядит следующим образом (18)

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 25 & 9 \end{bmatrix} & \text{если } i_{1q} \Delta f_{BC\Gamma} < 0, \\ \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} & \text{если } i_{1q} \Delta f_{BC\Gamma} = 0, \\ \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} & \text{если } i_{1q} \Delta f_{BC\Gamma} > 0. \end{cases}$$
(18)

Резюмируя вышеизложенное, принцип работы предлагаемого алгоритма адаптивной виртуальной демпферной обмотки показан на рис. 13 для случая снижения частоты сети. Как видно из представленных осциллограмм, за счет реализованной логики функционирования алгоритма становится возможным значительно уменьшить как скорость изменения частоты, так и величину максимального ее отклонения. При этом скорость восстановления частоты совместно с качеством демпфирования остаются на высоком уровне.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для оценки эффективности работы предлагаемого алгоритма управления ВСГ-Т было выполнено детальное математическое моделирование во временной области в эквивалентной схеме энергосистемы, описанной в первой части статьи, с помощью средства моделирования электромагнитных переходных процессов. При выполнении имитационного моделирования на тестовой модели энергосистемы с



Рис. 12. Осциллограммы изменения тока демпферной обмотки при возмущениях.

инвертором, управляемым разработанными адаптивными алгоритмами ВСГ-Т, использовался программный комплекс PSCAD/EMTDC, где воспроизводилась детальная модель инвертора с учетом силовых полупроводниковых ключей.

В качестве тестовых возмущений воспроизводились: 1) ступенчатое изменение уставки по активной мощности  $P_{ycr}$  с 0 до 0.2 отн.ед.; 2) ступенчатое изменение частоты сети с 60 до 59.9 Гц; 3) наброс нагрузки 0.5 МВт в точке подключения СП. При этом рассматривалось три случая, как показано на рис. 14: ВСГ-Т без адаптивного управления (черная кривая), ВСГ-Т только с адаптивной виртуальной инерцией (синяя кривая) и ВСГ-Т с адаптивной виртуальной инерцией и демпферной обмоткой (красная кривая).

Исходя из полученных результатов, следует, что при добавлении в алгоритм управления ВСГ-Т не только адаптивной инерции, но и адаптивной демпферной обмотки становится возможным значительно улучшить качество демпфирования без ухудшения динамического отклика при изменении уставки по активной мощности (рис. 14а). Последнее выражается в сохранении и даже улучшении скорости изменения выходной мощности (рис. 15а). Это доказывает исключение противоположного взаимовлияния скорости реакции контура по активной мощности и способности демпфировать колебания.

При рассмотрении случая с изменением частоты сети (рис. 14б) видно, что учет адаптивной демпферной обмотки в предлагаемом алгоритме управления позволяет улучшить профиль изменения частоты (рис. 15б). При этом отсутствует какое-либо влияние на установившееся значение активной мощности в послеаварийном режиме и, следовательно, на статизм регулирования по частоте. Данный вывод подтверждает нивелирование второго противоречия, возникающего при добавлении демпферного коэффициента в уравнение движения ВСГ.



Рис. 13. Принцип работы алгоритма адаптивной виртуальной демпферной обмотки ВСГ.



**Рис. 14.** Результаты моделирования при разных возмущениях: (а) изменение  $P_{ycr}$ ; (б) изменение частоты сети; (в) наброс нагрузки.

Из сравнения результатов, представленных на рис. 14а и 14в, следует, что предложенный алгоритм управления ВСГ-Т позволяет достигнуть быстрой реакции СП как при изменении уставки по активной мощности, так и при внешних возмущениях, приводящих к отклонениям частоты. Таким образом введение адаптивной демпферной обмотки не оказывает влияния на время нарастания активной мощности, но при этом значительно улучшает характер изменения частоты. Последнее выражается в уменьшении скорости изменения частоты и ее максимального отклонения более чем в 4.5 раза в сравнении со случаем без адаптивного ВСГ-Т (рис. 15в).

Для оценки эффективности работы предложенного алгоритма управления виртуальной инерцией ВСГ на основе нелинейной сигмоидальной функции также рассмотрен аналогичный наброс нагрузки 0.5 МВт в точке подключения СП при разных уставках  $df/dt_{yet}$  (рис. 16). На первом этапе осуществлено сравнение работы адаптивного алгоритма с традиционным двухпозиционным управлением. Для этого уставка  $df/dt_{yet}$  задавалась большой, как было пояснено в предыдущем разделе  $(df/dt_{yet} = 20 \ {\rm Fu}/{\rm c})$ . Из сравнения зеленой и желтой кривой на рис. 16а и 16б следует, что предложенный алгоритм ВСГ-Т почти не уступает традиционному двухпозиционному управлению, что обеспечивается за счет ввода дополнительного коэффициента чувствительности  $k_{H2}$  в уравнении (7). При этом, исходя из анализа изменения постоянной инерции ВСГ на рис. 16в, предложенный алгоритм позволяет меньше



Рис. 15. Гистограммы с характеристиками переходных процессов при разных возмущениях: (а) изменение *P*<sub>vct</sub>; (б) изменение частоты сети; (в) наброс нагрузки.

расходовать энергии цепи постоянного тока при возмущениях, что может быть количественно оценено с помощью площади под кривой [14]. В результате количество энергии, затраченной при использовании предложенного алгоритма, составляет  $\Delta E = 4725$  отн.ед., что на 21% меньше, чем при традиционном двухпозиционном vправлении с  $\Delta E = 5973$  отн.ел.

На втором этапе произведена оценка работы алгоритма адаптивной виртуальной инерции ВСГ при разных уставках  $df/dt_{vcr}$ . При рассмотрении черной, синей и красной кривых на рис. 16а и 16б видно, что предложенный алгоритм позволяет ограничивать скорость изменения частоты в соответствии с заданными уставками при наличии возможностей СП, которые определяются допустимым диапазоном изменения постоянной инерции ВСГ. Однако на начальном этапе изменения частоты при рассматриваемом возмущении диапазона изменения виртуальной инерции одного СП недостаточно для ограничения скорости изменения частоты. В этом случае необходимо увеличивать количество СП или диапазон изменения постоянной инерции ВСГ.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках второй части статьи представлены следующие результаты:



**Рис. 16.** Осциллограммы процессов при набросе нагрузки и разных уставках  $df/dt_{ycr}$ : (а) частота ВСГ; (б) скорость изменения частоты и значения уставки  $df/dt_{ycr}$ ; (в) инерция при разных алгоритмах.

За счет свойств предлагаемой структуры ВСГ-Т разработан адаптивный алгоритм управления, с помощью которого осуществляется независимое изменение трех основных параметров ВСГ ( $H_{BC\Gamma}$ ,  $L_{1q}$  и  $\tau_{1q}$ ), влияющих на инерционный отклик и демпфирование.

Для адаптивного управления виртуальной инерцией ВСГ-Т разработан алгоритм, основанный на нелинейной сигмоидальной функции. Благодаря этому стал возможен гибкий контроль величины инерции по превышению уставки по скорости изменения частоты на всем протяжении переходного процесса, а также уменьшилось потребление энергии со стороны цепи постоянного тока при малых отклонениях частоты без негативного влияния на общий характер переходного процесса. Подобные возможности управления являются труднореализуемыми в случае применения распространенных алгоритмов на основе двухпозиционного управления.

Для адаптивного управления параметрами виртуальной демпферной обмотки ВСГ-Т с применением диаграммы Вышнеградского в качестве контролируемого сигнала используется виртуальный ток демпферной обмотки. Такое решение позволяет улучшить демпфирующие свойства ВСГ и при этом исключается влияние на уравнение движения виртуального ротора и формируемый за счет него отклик по активной мощности и статизм регулирования по частоте.

Практическая значимость представленной работы заключается в широких возможностях применения разрабатываемой технологии ВСГ для сетевых инверторов, применяемых в промышленности. Одной из особенностей является возможность адаптации алгоритмов ВСГ для разных объектов: ветроэнергетических и фотоэлектрических установок, систем накопления энергии, а также гибких систем передачи переменного тока (для вставок и линий постоянного тока) с учетом специфики функционирования каждого конкретного объекта управления. При этом объекты генерации и накопления энергии с управлением на основе ВСГ-Т могут успешно применяться как в изолированных, так и в централизованных энергосистемах. В качестве перспективы для изолированных энергосистем можно рассматривать использование инверторов с ВСГ-Т для автоматизированных гибридных энергокомплексов с целью повышения коэффициента установленной мощности ВИЭ в их составе, а также потенциального снижения затрат на дизельное топливо за счет оптимизации работы дизель-генераторов. Для централизованных энергосистем за счет применения алгоритмов ВСГ-Т в рамках инверторного оборудования сетевых электростанций на базе ВИЭ становится возможным более гибкое их участие в регулировании частоты и напряжения сети, обеспечение требуемого инерционного отклика, эффективное демпфирование послеаварийных колебаний, а также улучшение качества электроэнергии. Стоит отметить, что указанное в целом справедливо и при рассмотрении изолированных энергосистем.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-00204.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

 Alipoor J., Miura Y., Ise T. Power System Stabilization Using Virtual Synchronous Generator With Alternating Moment of Inertia // IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics, 2015. V. 3(2). P. 451–458.

https://doi.org/ 10.1109/JESTPE.2014.2362530

- Li J., Wen B., Wang H. Adaptive Virtual Inertia Control Strategy of VSG for Micro-Grid Based on Improved Bang-Bang Control Strategy // IEEE Access, 2019. V. 7. P. 39509–39514. https://doi.org/ 10.1109/ACCESS.2019.2904943
- Malekpour M., Kiyoumarsi A., Gholipour M. A hybrid adaptive virtual inertia controller for virtual synchronous generators // International Transactions on Electrical Energy Systems, 2021. V. 31(7). e12913.

https://doi.org/ 10.1002/2050-7038.12913

4. *Fang H., Yu Z.* Improved virtual synchronous generator control for frequency regulation with a coordinated self-adaptive method // CSEE Journal of Power and Energy Systems, 2020.

https://doi.org/ 10.17775/CSEEJPES.2020.01950. (*в печати*)

 Zheng T. et al. Adaptive Damping Control Strategy of Virtual Synchronous Generator for Frequency Oscillation Suppression // 12<sup>th</sup> IET International Conference on AC and DC Power Transmission, 2016. P. 1–5.

https://doi.org/ 10.1049/cp.2016.0458

 Shi K. et al. Rotor inertia adaptive control and inertia matching strategy based on parallel virtual synchronous generators system // IET Generation, Transmission & Distribution, 2020. V. 14(10). P. 1854–1861.

https://doi.org/ 10.1049/iet-gtd.2019.1394

 Wang Q. et al. Improved Adaptive Inertia and Damping Coefficient Control Strategy of VSG Based on Optimal Damping Ratio // International Power Electronics Conference (IPEC-Himeji 2022-ECCE Asia), 2022. P. 102–107.

https://doi.org/ 10.23919/IPEC-Himeji2022-ECCE53331.2022.9806825

- Qu S., Wang Z. Cooperative Control Strategy of Virtual Synchronous Generator Based on Optimal Damping Ratio // IEEE Access, 2021. V. 9. P. 709–719. https://doi.org/ 10.1109/ACCESS.2020.3046626
- Chen J. et al. Adaptive Virtual Synchronous Generator Considering Converter and Storage Capacity Limits // CSEE Journal of Power and Energy Systems, 2022. V. 8(2). P. 580–590.
- https://doi.org/ 10.17775/CSEEJPES.2019.03360
  10. *Li M. et al.* A Dual-Adaptivity Inertia Control Strategy for Virtual Synchronous Generator // IEEE Transactions on Power Systems, 2020. V. 35(1). P. 594–604.
- 11. https://doi.org/ 10.1109/TPWRS.2019.2935325
- Sun L. et al. Adaptive Inertia Control of Virtual Synchronous Generator Based on Power Feedback // IEEE 4<sup>th</sup> International Electrical and Energy Conference (CIEEC), 2021. P. 1–5. https://doi.org/ 10.1109/CIEEC50170.2021.9510442
- Wang F. et al. An Adaptive Control Strategy for Virtual Synchronous Generator // IEEE Transactions on Industry Applications, 2018. V. 54(5). P. 5124–5133. https://doi.org/ 10.1109/TIA.2018.2859384
- Li D. et al. A Self-Adaptive Inertia and Damping Combination Control of VSG to Support Frequency Stability // IEEE Transactions on Energy Conversion, 2017. V. 32(1). P. 397–398. https://doi.org/ 10.1109/TEC.2016.2623982e,hfnm
- Markovic U. et al. LQR-Based Adaptive Virtual Synchronous Machine for Power Systems with High Inverter Penetration // IEEE Transactions on Sustainable Energy, 2019. V. 10(3). P. 1501–1512. https://doi.org/ 10.1109/TSTE.2018.2887147e,hfnm

# Adaptive Control algorithm Based on a Virtual Synchronous Generator. Part II

A. A. Suvorov, A. B. Askarov<sup>\*</sup>, N. Yu. Ruban, Yu. D. Bay

Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia \*e-mail: aba7@tpu.ru

An increase in the penetration level of power plants based on renewable energy sources using power converters (PCs) has a direct impact on the dynamic characteristics of modern electric power system (EPS) and, as a consequence. the nature of the transient processes. One of the main problems in such EPS is a significant change in the magnitude of the total inertia of the system over time, which leads to an increase in the rate of change of frequency and the magnitude of its maximum deviation under various disturbances. A promising direction for solving this problem is the synthesis of new structures of PC control systems based on a virtual synchronous generator (VSG) with adaptively changing parameters. The results of the research in this area are presented in the paper, which consists of two parts. In the first part of the paper, the dependence of the adaptive algorithms efficiency for controlling the parameters of the VSG on the structure used is substantiated. A comparative analysis of the developed modified VSG structure with traditional algorithms is performed and its fundamental advantages are proved. The second part of the article presents an analysis of the influence of the modified structure parameters of the VSG on the dynamic response using time domain transient analysis. Based on the results obtained. adaptive algorithms for independent control of virtual inertia and parameters of the VSG damper winding have been developed. The performed mathematical modeling confirmed the reliable and efficient operation of the developed adaptive control algorithms and the modified structure of the VSG as a whole. From the theoretical and experimental results obtained in the paper, it follows that there is a need for simultaneous development and improvement of adaptive control algorithms and the VSG structures used for this.

*Keywords:* renewable energy sources, virtual synchronous generator, power converter, control system, adaptive control, virtual inertia

УДК 620.92

# ТЕХНОЛОГИИ КОМПЛЕКСНОГО ОСВОЕНИЯ ГИДРОГЕОТЕРМАЛЬНЫХ РЕСУРСОВ СЕВЕРОКАВКАЗСКОГО РЕГИОНА

© 2024 г. А. Б. Алхасов, Д. А. Алхасова<sup>\*</sup>

Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики — филиал Объединенного института высоких температур РАН, Махачкала, Россия <sup>\*</sup>e-mail: alkhasova.dzhamilya@mail.ru

> Поступила в редакцию 16.08.2023 г. После доработки 17.06.2024 г. Принята к публикации 22.06.2024 г.

Приведены технологические схемы комплексного освоения высокопараметрических геотермальных рассолов с выделением пара, отличающиеся друг от друга в зависимости от исходных параметров теплоносителя. Такое освоение рассолов позволит осуществить преобразование их тепловой энергии в электрическую и значительно увеличить их минерализацию, что упростит процессы извлечения из них химических соединений. Рассмотрена возможность использования разработанной технологии с выработкой электроэнергии в паротурбинном и бинарном энергоблоках и последующим извлечением химкомпонентов из рассола для Тарумовского геотермального месторождения. Приведены геотермально-биогазовые технологические схемы с комплексным использованием термальных вод на различные нужды. Такие системы позволяют максимальным образом использовать ресурсный потенциал геотермальной скважины и биомассы, что позволит существенным образом улучшить эколого-экономическую ситуацию в Северокавказском регионе.

*Ключевые слова:* термальные воды, эффективные технологии, комплексное освоение, бинарная ГеоЭС, термодинамический цикл, теплообменник, химические компоненты, геотермально-биогазовые технологии

DOI: 10.31857/S0002331024020078

# **ВВЕДЕНИЕ**

Энергосберегающие технологии на основе геотермальной энергии являются важной составляющей в освоении возобновляемых энергетических ресурсов и успешно конкурируют с другими способами получения энергии [1, 3]. В ряде стран геотермальные технологии становятся доминирующими, и доля геотермальной энергии в мировом энергетическом балансе неуклонно растет. В [4–8] приведен обзор современного состояния и перспективы развития геотермальной энергетики.

Повышения эффективности освоения геотермальных энергоресурсов различного потенциала можно добиться комплексным их освоением с применением более совершенных технологий и новых конструкций оборудования. Большие перспективы по строительству комплексных систем геотермального энергоснабжения имеются на большинстве месторождений термальных вод России. В ранее опубликованных работах [9–11] были предложены технологии комплексного освоения геотермальным месторождениям. Были предложены технологические решения для комплексного освоения высокотемпературных гидрогеотермальных ресурсов Северокавказского региона с преобразованием тепловой энергии в электроэнергию в бинарной ГеоЭС и последующим извлечением растворенных химических соединений.

Северокавказский регион является одним из перспективных для освоения геотермальной энергии. Гидрогеотермальные ресурсы только одного Восточно-Предкавказского артезианского бассейна (ВПАБ) оцениваются до 10 000 МВт тепловой и 1000 МВт электрической мощности. В ближайшей перспективе наиболее оптимальным является освоение части этих ресурсов с использованием простаивающих скважин на выработанных нефтегазовых месторождениях, их в регионе насчитывается до 2000. ВПАБ представляет собой огромную чашу, заполненную мезозойско-кайнозойской осадочной толщей мощностью от 10–12 в Терско-Каспийском прогибе до 1.5–2.8 на Ставропольском своде и до 1.2–2.0 км в пределах кряжа Карпинского, который считается северной границей этого многоярусного артезианского бассейна. На большей части бассейна в его вертикальном разрезе выделяются три гидрогеотермических яруса, изолированных друг от друга мощными водонепроницаемыми толщами сарматских и майкопских глин: плиоценовый, миоценовый и мезозойский. В этих ярусах соответственно залегают низко-, средне- и высокотемпературные гидрогеотермальные ресурсы. В табл. 1 приведены области предпочтительного использования ресурсов.

Высокая экономическая эффективность низкопотенциальных гидрогеотермальных ресурсов достигается при комплексном их освоении с использованием теплового потенциала на энергетические нужды в технологиях с тепловыми насосами, а самой воды на различные водохозяйственные цели. Освоение среднепотенциальных термальных вод осуществимо в комбинированных геотермально—парогазовых энергетических системах, включающих бинарную ГеоЭС и газотурбинную установку (ГТУ) и имеющих преимущества и возобновляемых источников, и ископаемых

| Низкотемпературные<br>(20-60°С)<br>(низкопотенциальные)   | Среднетемпературные<br>(61–100°С)<br>(среднепотенциальные)   | Высокотемпературные<br>(101–220°С)<br>(высокопотенциальные)   |
|---|--|---|
| Низкотемпературное<br>теплоснабжение<br>Теплонасосное<br>теплоснабжение<br>Горячее водоснабжение<br>Питьевое водоснабжение<br>Техническое водоснабжение<br>Орошение агрокультур | Теплоснабжение<br>Выработка электроэнергии<br>на бинарных ГеоЭС<br>Выработка электроэнергии<br>на геотермально-<br>парогазовых<br>энергоустановках<br>Использование в<br>энергобиологических<br>комплексах (ЭБК) | Теплоснабжение<br>Выработка электроэнергии<br>на бинарных ГеоЭС<br>Извлечение растворенных<br>химических компонентов<br>(карбонат лития, пищевая<br>соль, карбонат кальция и<br>др.)<br>Использование в ЭБК |

Таблица 1. Области использования гидрогеотермальных ресурсов ВПАБ

| Nº<br>CKB           | Площадь                 | ь Интервал Содержание редких элементов, мг/л |              | Минерализация, |             |                 |                |
|---------------------|-------------------------|--|--------------|----------------|-------------|-----------------|----------------|
| URD.                |                         | М  | Li           | Rb             | Cs          | Sr              | 1/21           |
|                     |                         | Респ   | ублика Д     | агестан        |             |                 |                |
| 18<br>44            | Русский Хутор           | 3179–3185<br>3473–3483                       | 37.5<br>44.9 | 2.25<br>4.4    | 0.43<br>3.2 | 750.0<br>1035.0 | 125.0<br>121.0 |
| 4                   | Сухокумск               | 3255-3257                                    | 44.3         | 3.36           | 0.61        | 756.0           | 104.8          |
| 4                   | Восточно-<br>Сухокумск  | 3367–3371<br>3691–3695                       | 63.7<br>72.4 | 5.46<br>3.99   | 0.18        | 559.0           | 133.8<br>137.0 |
| 14<br>20            | Южно–<br>Сухокумск      | 3291-3295<br>3392-3398                       | 53.6<br>50.0 | 3.59<br>2.1    | 0.69<br>0.7 | 1169.0<br>550.0 | 132.0<br>127.0 |
| 2                   | Октябрьская             | 3383-3390                                    | 44.0         | 4.3            | 0.7         | 243.0           | 109.0          |
| 4                   | Таловская               | 3443-3455                                    | 53.8         | 5.5            | 0.9         | 596.0           | 112.4          |
| 1                   | Эмировская              | 3590-3603                                    | 75.4         | 4.24           | 1.5         |                 | 134.4          |
| 1                   | Кумухская               | 4778-4811                                    | 53.9         | 1.7            | 0.55        |                 | 110.5          |
| 2                   | Юбилейная               | 3909-3911                                    | 93.0         | 5.54           | 0.86        |                 | 125.0          |
| 2                   | Северо–<br>Кочубеевская | 3436-3446                                    | 86.8         | 5.4            | 0.91        | 540.0           | 119.0          |
| 1                   | Комсомольская           | 5078-5084                                    | 166.0        | 10.4           | 3.0         | 1607.0          | 183.0          |
| 1                   | Тарумовская             | 5429   | 200.0        | 9.3            | 5.6         | 1400.0          | 200.0          |
| 6                   | Дахадаевская            | 3636-3642                                    | 70.3         | 4.1            | 0.4         | 741.0           | 131.0          |
| 14                  | Солончаковая            | 3640-3646                                    | 122.5        | 5.0            | 0.94        | 625.0           | 124.0          |
| 1                   | Ногайская               | 3580-3585                                    | 66.7         | 4.6            |             | 739.0           | 136.4          |
| 21                  | Майская                 | 3627-3635                                    | 80.0         | 6.03           | 1.88        | 790.0           | 129.1          |
| 6                   | Равнинная               | 3716-3720                                    | 63.7         |                |             | 529.0           | 132.0          |
| 8                   | Капиевская              | 3830-3840                                    | 55.0         | 3.2            | 2.1         | 700.0           | 130.3          |
| 20                  | Берикей                 |  | 42.0         | 3.4            | 0.85        | 520.0           | 70.0           |
| Ставропольский край |                         |  |              |                |             |                 |                |
| 116                 | Зимняя Ставка           |  | 20.0         | 0.1            | 0.489       |                 | 106.0          |
| 96                  | Озек-Суат               |  | 21.3         | 1.7            | 0.1         | 312.0           | 79.0           |
| 27                  | Ачикулак                |  | 26.3         | 3.02           | 0.57        |                 |                |
|                     |                         | Чечен  | ская Рес     | публика        | L           |                 |                |
| 167                 | Карабулак-<br>Ачалуки   |  | 21.0         | 31.2           | 7.7         |                 |                |
| 11                  | Датыхская               |  | 160.0        | 18.3           | 3.3         |                 |                |

## Таблица 2. Содержание редких элементов в термальных рассолах ВПАБ

топлив. Эффективное освоение высокотемпературных геотермальных рассолов предполагает комплексную утилизацию всех видов энергий и растворенных химических компонентов.



**Рис. 1.** Технологическая схема комплексного освоения высокотемпературных геотермальных рассолов: *1* – геотермальная скважина; *2* – сепаратор–пароотделитель; *3* – паровая турбина; *4* – генератор; *5* – теплообменник; *6* – испаритель–перегреватель; *7* – турбина на низкокипящем рабочем теле; *8* – конденсатор; *9* – циркуляционный насос; *10* – охлажденный дистиллят; *11* – завод по извлечению химических компонентов; *12* – опресненная вода.

Наиболее перспективными для освоения являются высокотемпературные геотермальные рассольные воды ВПАБ. В его пределах на глубинах 3000–5500 м выявлено 92 площади с редкометалльными промышленными водами, из которых 55 находятся на территории Дагестана, 29 – в Ставропольском крае и 8 – в Чеченской республике. Редкие элементы (литий, рубидий, цезий и стронций) в рассолах нижнего яруса содержатся в количествах, достаточных для обеспечения различных отраслей экономики России на дальнюю перспективу. Предложен ряд технологических схем для комплексного освоения таких ресурсов, где их тепловой потенциал утилизируется в бинарной ГеоЭС [8]. В табл. 2 приведено содержание редких элементов в рассолах на некоторых площадях ВПАБ [2].

# ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ КОМПЛЕКСНОГО ОСВОЕНИЯ ГИДРОГЕОТЕРМАЛЬНЫХ РЕСУРСОВ

Перспективным направлением комплексного освоения высокотемпературных рассолов является получение пара при снижении давления с различными схемами, технологически отличающиеся друг от друга, в зависимости от исходных параметров

первичного теплоносителя. Разработан ряд схем (рис. 1–3) комплексного освоения высокотемпературных геотермальных рассолов с выделением пара, что позволит значительно увеличить минерализацию рассола и упростить процессы извлечения из него химических соединений.

В схеме на рис. 1 рассол из скважины с высокой температурой (до 200°С) и высоким избыточным давлением у устья скважины (до 20 МПа) поступает в сепараторы-пароотделители циклонного типа 2, где давление снижается до 1 МПа. Выделившийся пар (180°C) из верхней части пароотделителя подводится в паровую турбину, где на выходе из турбины его температура снижается до 111°C при давлении 0.15 МПа [12]. Отработанный в турбине пар поступает в теплообменники 5 контура бинарной ГеоЭС, где, отдавая тепло низкокипящему рабочему телу, конденсируется и далее используется на различные водохозяйственные цели. В теплообменниках происходит нагрев и частичное испарение низкокипящего рабочего тела. Далее рабочее тело проходит через испаритель-перегреватель 6, где происходит дальнейшее испарение и перегрев рабочего тела, куда из сепаратора по шламопроводу поступает высокотемпературный и высококонцентрированный рассол. Из испарителя охлажденный рассол поступает на завод 11 по извлечению химических компонентов. Испаритель-перегреватель конструктивно соответствует теплообменнику типа "труба в трубе", который эффективно используется для снятия тепла с высокоминерализованных термальных вод [10]. Перегретое рабочее тело из испарителя-перегревателя 6 поступает на турбину 7 бинарной ГеоЭС.

В схеме на рис. 2 нагрев рабочего тела происходит в теплообменнике 5 за счет съема тепла с высокотемпературного концентрированного рассола, его испарение и



**Рис. 2.** Технологическая схема комплексного освоения высокотемпературных геотермальных рассолов: *1* – геотермальная скважина; *2* – сепаратор–пароотделитель; *3* – паровая турбина; *4* – генератор; *5*, *6* – теплообменник; *7* – турбина на низкокипящем рабочем теле; *8* – конденсатор; *9* – циркуляционный насос; *10* – на различные цели; *11* – завод по извлечению химических компонентов; *12* – опресненная вода.



**Рис. 3.** Технологическая схема комплексного освоения высокотемпературных геотермальных рассолов: *1* – геотермальная скважина; *2* – сепаратор–пароотделитель; *3* – паровая турбина; *4* – генератор; *5*, 6 – теплообменник; 7 – турбина на низкокипящем рабочем теле; *8* – конденсатор; *9* – циркуляционный насос; *10* – на водохозяйственные цели; *11* – завод по извлечению химических компонентов; *12* – опресненная вода; *13* – подвод низкотемпературного теплоносителя; *14* – на теплоэнергетические нужды.

перегрев происходит в блоке теплообменников 6 (испаритель и перегреватель). Из испарителя конденсировавшаяся опресненная вода с высокой температурой (90–95°С), используется на различные теплоэнергетические и водохозяйственные цели.

В схеме на рис. 3 доведение до необходимых параметров рабочего тела происходит при его последовательном прохождении через блок теплообменников 5, включающий нагреватель, испаритель и перегреватель. Отработанный первичный теплоноситель с низкой температурой используется на водохозяйственные цели. Тепловой потенциал высококонцентрированного рассола утилизируется в теплообменнике 6, куда подводится низкотемпературный теплоноситель 13 и отводится нагретый теплоноситель 14 на теплоэнергетические нужды.

Рассмотрим использование технологической схемы с получением пара при снижении давления для Тарумовского геотермального месторождения (рис. 1). Для этого месторождения ранее была предложена технология утилизации высокотемпературного тепла геотермальной скважины в схеме с бинарной ГеоЭС на сверхкритическом цикле Ренкина [14].

Мощность паровой турбины определяется по формуле

$$N = \eta G(h_1 - h_2),$$

*сде*  $\eta$  – КПД турбины; *G* – массовый расход пара, кг/с;  $h_1$  – энтальпия пара на входе в турбину, кДж/кг;  $h_2$  – энтальпия пара на выходе из турбины, кДж/кг.

При снижении давления в сепараторе до 1 МПа из всего расхода скважины № 6 выделяется 80 кг/с пара, который, проходя через, турбину вырабатывает электроэнергию, мощность турбины составляет 5.2 МВт. Дополнительно в блоке бинарной ГеоЭС можно получить до 2 МВт мощности, тогда общая мощность на паротурбинном и бинарном блоках составляет 7.2 МВт, что значительно меньше мощности бинарной ГеоЭС (15.4 МВт) на сверхкритическом цикле [14].

Выбор технологии комплексного освоения высокопараметрических геотермальных рассолов зависит от многих факторов — мощности блока по выработке электроэнергии, затрат на приобретение оборудования, эксплуатационных затрат на их обслуживание, сложности процессов извлечения химических компонентов, экологических проблем, возникающих при эксплуатации и др.

В Северокавказском регионе биомасса является одним из перспективных видов ВИЭ, только в республике Дагестан ее экономический потенциал составляет около 560 тыс. т у.т./год, из которого на долю отходов животноводства приходится 335.5 тыс. т у.т./год [2]. В настоящее время ресурсы биомассы не востребованы. Переработка их в биореакторных установках с получением биогаза позволит существенным образом улучшить эколого—экономическую ситуацию в регионе.

Разработана технологическая схема (рис. 4) комплексного освоения гидрогеотермальных ресурсов, в которой тепловой потенциал термальной воды используется в ГеоЭС, в биореакторе для подогрева сырья и для других нужд (теплица, рыборазводный бассейн). Полученный при этом биогаз сжигается в ГТУ, выхлопные газы направляются в блок по выращиванию белково—витаминной биомассы.

Вода из скважины 1 поступает в ГеоЭС 2, далее вода с температурой 65°С поступает в метантенк 3 для поддержания термофильного процесса брожения биомассы (животноводческих отходов). Из метантенка вода с более низкой температурой поступает в теплицу 8 и далее в рыборазводный бассейн 9, образующиеся после брожения биомассы удобрения высокого качества 10 направляются для использования по назначению. Биогаз из метантенка поступает в газгольдер 4, далее он сжигается в ГТУ 5. Образующиеся при этом выхлопные газы направляются для охлаждения в теплообменник 6 и далее в теплицу 8 и в блок выращивания водорослей 7 (поглощение растениями и водорослями углекислого газа приводит к быстрому их росту).

В схеме на рис. 5 термальная вода из добычных скважин 1 поступает в геотермальный центральный тепловой пункт 2. Часть воды подводится в биореакторы 3 (метантенки), остальная вода направляется в блок комбинированной геотермально-парогазовой электростанции (ГПЭС) 6. В биореакторе из биомассы получают обеззараженные удобрения высокого качества 9 и биогаз. После осушки биогаз поступает в ГТУ 5, где вырабатывается электроэнергия. Отработанные в цикле ГТУ выхлопные газы направляются в ГПЭС, где за счет термальной воды осуществляется нагрев низкокипящего рабочего тела в цикле Ренкина до температуры насыщения, а дальнейшее испарение и перегрев тела осуществляется за счет утилизации тепла отработанных газов в цикле Брайтона. Далее отработанные газы поступают в блок по выращиванию белково-витаминной биомассы 7. Отработанная вода из биореактора и ГПЭС поступает на насосную станцию для закачки по нагнетательным скважинам 8 в материнский пласт.



**Рис. 4.** Схема комплексного освоения гидрогеотермальных ресурсов: *1* – скважина; *2* – бинарная ГеоЭС; *3* – метантенк; *4* – газгольдер; *5* – ГТУ; *6* – теплообменник; *7* – блок по выращиванию белково–витаминной биомассы; *8* – теплица; *9* – рыборазводный бассейн; *10* – обеззараженные удобрения; *11* – сброс отработанной воды; *12* – подвод холодной воды; *13* – отвод нагретой воды.

В последние годы биоэнергетика стала самостоятельной отраслью энергетики. Во многих странах мира ее вклад в энергобаланс стран превышает суммарный вклад остальных ВИЭ. Современная промышленная биоэнергетика представлена различными технологиями. Россия имеет возможности интенсивного развития практически всех современных направлений использования биомассы для энергетики. Ведущее место должны занять современные высокорентабельные биогазовые технологии, с использованием которых возможна биохимическая переработка всех органических отходов агропромышленного комплекса. Привлекательными являются комбинированные технологии переработки отходов, основанные полностью на ВИЭ, где тепло и электроэнергия, используемые при переработке, получены от возобновляемых энергоресурсов. Такие технологии должны стать важной составляющей стратегического развития Северокавказского региона.



**Рис. 5.** Комбинированная технологическая схема утилизации биомассы и геотермальной энергии: *1* –добычные скважины; *2* – ГЦТП; *3* – метантенк; *4* – газгольдер; *5* – ГТУ; *6* – ГПЭС; *7* – блок по выращиванию белково–витаминной биомассы; *8* – нагнетательные скважины; *9* – обеззараженные удобрения.

#### выводы

Разработаны технологические схемы комплексного освоения высокопараметрических геотермальных рассолов с выделением пара, технологически отличающиеся друг от друга в зависимости от исходных параметров теплоносителя. Такое освоение рассолов позволит осуществить преобразование их тепловой энергии в электрическую и значительно увеличить их минерализацию, что упростит последующие процессы извлечения из них химических соединений. Масштабное освоение рассолов даст возможность решить проблемы энерго— и водоснабжения Северокавказского региона, обеспечить потребности в редких элементах.

Рассмотрена возможность использования технологии с выработкой электроэнергии в паротурбинном и бинарном энергоблоках и последующим извлечением химкомпонентов из рассола для Тарумовского геотермального месторождения. Рассчитанная общая мощность на паротурбинном и бинарном блоках составляет 7.2 МВт, что значительно меньше мощности бинарной ГеоЭС (15.4 МВт) на сверхкритическом цикле. Окончательный выбор технологии комплексного освоения высокопараметрических геотермальных рассолов зависит от технико—экономического обоснования с учетом многих факторов: затрат на приобретение оборудования, эксплуатационных затрат на их обслуживание, мощности блока по выработке электроэнергии, сложности процессов извлечения химических компонентов, экологических проблем, возникающих при эксплуатации и др.

Разработаны комбинированные геотермально—биогазовые технологические схемы с комплексным использованием термальных вод на различные нужды. Переработка ресурсов биомассы в биореакторных установках с получением биогаза позволит улучшить эколого—экономическую ситуацию в Северокавказском регионе, где биомасса является одним из перспективных для освоения ВИЭ. Круглогодичная эксплуатация геотермальных скважин позволит наиболее эффективно использовать их ресурсный потенциал.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Алхасов А.Б.* Геотермальная энергетика: проблемы, ресурсы, технологии // М.: Физматлит, 2008. 376 с.
- 2. Алхасов А.Б., Алхасова Д.А., Алишаев М.Г., Рамазанов А.Ш., Рамазанов М.М. Освоение геотермальной энергии // М.: Физматлит, 2022. 320 с.
- 3. *Томаров Г.В., Никольский А.И., Семенов В.Н., Шипков А.А.* Геотермальная энергетика. М.: Теплоэнергетик. 2015. 304 с.
- John W. Lund, Gerald W. Huttrer, Aniko N. Toth. Characteristics and trends in geothermal development and use, 1995 to 2020 // Geothermics, 2022. V. 105. https://doi.org/ doi.org/10.1016/j.geothermics.2022.102522
- 5. Томаров Г.В., Шипков А.А. Краткий обзор современного состояния и тенденций развития геотермальной энергетики // Теплоэнергетика. 2023. № 2. С. 37–46.
- Shyi–Min Lu. A global review of enhanced geothermal system (EGS). Renew Sustain Energy Rev 81(2):2902–2921. 2018.

https://doi.org/ 10.1016/j.rser.2017.06.097

 Rybach L. Status and Prospects of Geothermal Energy // Proc. World Geothermal Congress-2010, Bali, Indonezia, 25–29 April 2010.

- 8. *Lund J.W., Toth A.N.* Direct utilization of geothermal energy 2020: Worldwide review // Proc. of the World Geothermal Congress 2020+1/ Reykjavik, Ictland, Apr.–Oct.2021.
- 9. Алхасов А.Б., Алхасова Д.А. Комплексное использование низкопотенциальных термальных вод юга России для тепло—, водоснабжения и решения экологических проблем // Теплоэнергетика. 2019. № 5. С. 82–88.
- 10. Алхасов А.Б., Алхасова Д.А., Рамазанов А.Ш., Каспарова М.А. Перспективы комплексного освоения высокопараметрических геотермальных рассолов // Теплоэнергетика. 2015. № 6. С. 11–17.
- 11. Алхасов А.Б., Алхасова Д.А., Рамазанов А.Ш., Каспарова М.А. Технологии освоения высокоминерализованных геотермальных ресурсов // Теплоэнергетика. 2017. № 9. С. 17–24.
- 12. Александров А.А., Орлов К.А., Очков В.Ф. Теплофизические свойства рабочих веществ теплоэнергетики: справочник // М.: Издательский дом МЭИ, 2017. 226 с.
- 13. *Алхасов А.Б., Алхасова Д.А*. Теплообменники для утилизации тепла высокотемпературных геотермальных рассолов // Теплоэнергетика. 2018. № 3. С. 36–41.
- 14. Алхасов А.Б., Алхасова Д.А., Рамазанов А.Ш., Каспарова М.А. Перспективы освоения высокотемпературных высокоминерализованных ресурсов Тарумовского геотермального месторождения // Теплоэнергетика. 2016. № 6. С. 25–30.

# Technologies of the Integrated Development of Hydrogeothermal Resources of the North Caucasian Region

# A. B. Alkhasov, D. A. Alkhasova\*

Institute for Geothermal Research and Renewable Energy of JIHT RAS, Makhachkala, Russia \*e-mail: alkhasova.dzhamilya@mail.ru

This paper focuses on the technologies of the integrated development of highparametric geothermal brines with steam release. They differ from each other depending on initial parameters. Such way of brine utilization will make it possible to transform thermal energy to electrical power along with significant increasing its salinity that contributes to chemical components extraction. The opportunity is considered of this technology application in the Tarumovka geothermal field with electric power generation in steam-turbine and binary power plants, and consequent obtaining valuable mineral components. The geothermal and biogas technologies are given proposing integrated utilization of thermal water for various applications. Such systems make it possible to use resource potential of geothermal well and biomass that will result in improvement of economic and environmental situation in the North Caucasus region.

*Keywords*: thermal waters, efficient technologies, integrated development, binary GPP, thermodynamic cycle, heat exchanger, chemical components, geothermal and biogas technologies

УДК 621.317

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ В СТЕПЕННОЙ РЯД

© 2024 г. Н. В. Коровкин<sup>1</sup>, С. С. Грицутенко<sup>2</sup>, Д. А. Федотов<sup>3, \*</sup>

 <sup>1</sup>ФГАОУ ВО Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия
 <sup>2</sup> "НПО ТЕХНО-АС", Коломна, Россия
 <sup>3</sup>ФГБОУ ВО Омский государственный университет путей сообщения, Омск, Россия
 \*e-mail: fedotoff-dm@yandex.ru

> Поступила в редакцию 13.10.2023 г. После доработки 17.06.2024 г. Принята к публикации 20.06.2024 г.

Рассмотрена задача контроля параметров нелинейных элементов, входящих в разнообразные электротехнические устройства. Предложен и исследован новый алгоритм воспроизведения по результатам измерения нелинейной ВАХ устройства, обладающий рядом преимуществ в сравнении с известными, позволяющий, в частности, получать аналитическое представление ВАХ в реальном масштабе времени. В основе предлагаемого алгоритма лежит непосредственное определение коэффициентов полиномиальной аппроксимации ВАХ. Также выполнен обзор научных исследований, сделанных к настоящему времени другими авторами, занимающимися данной проблемой. В статье также получены простые соотношения для определения амплитуд гармоник тока через коэффициенты степенного ряда и амплитуды напряжения на нелинейном элементе. Для облегчения промежуточных расчетов использованы биноминальные коэффициенты. Получены соотношения для нулевой, нечетной и четной гармоник тока, а также аналитические выражения для коэффициентов полиномиальной аппроксимации. Выполнено экспериментальное исследование предложенного метода, по результатам которого произведена оценка его точности. Использование предлагаемого метода существенно упрощает обработку и сокрашает время измерений нелинейных ВАХ.

*Ключевые слова:* вольтамперная характеристика, нелинейный элемент, аппроксимация, гармоника тока, коэффициент разложения

DOI: 10.31857/S0002331024020081

## введение

Измерение вольтамперных характеристик нелинейных элементов в реальном масштабе времени востребована в самых различных прикладных областях [1–4]. Современные средства измерений позволяют выполнять измерения напряжений и токов с погрешностью, не превышающей 2<sup>-12</sup> и мегагерцовыми частотами измерений. При этом в большом числе приложений интерес представляют не сами измеряемые напряжения (токи) устройств, а их вольтамперные характеристики (BAX). Также

важным требованием является необходимость воспроизведение ВАХ устройств и изменений ВАХ в реальном масштабе времени. Именно такие алгоритмы позволяют создавать системы оперативного реагирования на регламентные или аварийные изменения режимов работы разнообразных технических устройств и систем.

Большинство электротехнических устройств обладают нелинейными ВАХ. Используемые в промышленности реальные устройства имеют сложные ВАХ, что затрудняет их описание с достаточной точностью при помощи простых аналитических выражений. Для ряда приложений важным также является определение ВАХ элемента "здесь и сейчас", так как определенная заранее ВАХ может неверно отражать реальные свойства нелинейного элемента (НЭ), например, из-за деградации его характеристик ввиду старения.

Рассмотрим НЭ с управляемой напряжением ВАХ. Зависимость тока *i* от напряжения *u* таких устройств может быть представлена в виде [5]

$$i = g(u), \tag{1}$$

где g(u) однозначно определенная непрерывная функция. Если НЭ с ВАХ (1) рассматривать как, например, нагрузку в электрической цепи переменного тока, то нелинейность ВАХ приведет к возникновению высших гармоник в токах в общем случае всех ветвей цепи. Это может негативно влиять на работу устройств, составляющих цепь, вызывая их дополнительный нагрев, внося помехи и изменяя штатный режим функционирования вплоть до перехода цепи в нерабочее состояние. Поэтому весьма важным для практики является возможность выполнять измерение ВАХ в реальном времени.

Для анализа процессов в нелинейных цепях удобно задать ВАХ НЭ в аналитическом виде, используя ту или иную аппроксимирующую функцию, которая, являясь желательно достаточно простой, могла бы тем не менее воспроизводить особенности реальной характеристики с достаточной точностью. В электротехнике с этой целью наиболее часто используют кусочно-линейную и полиноминальную аппроксимации, а также их симбиоз — сплайн-аппроксимацию. Сопоставлению достоинств и недостатков этих аппроксимаций посвящено значительное число работ [6] и не обсуждается здесь. В рамках настоящей статьи мы рассмотрим только полиномиальную аппроксимацию. Авторами настоящей статьи ранее был предложен метод измерения характеристик нелинейных элементов электрической цепи [7–9]. Материал настоящей статьи является продолжением этих разработок и совершенствованием предложенного метода.

#### ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Полиномиальная аппроксимация g(u) имеет вид, точность которой определяется количеством членов разложения.

$$g(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_K u^K,$$
(2)

где  $a_m \quad m = \overline{0, K}$  — коэффициенты полинома, а K — его порядок, определяющий во многом точность аппроксимации. Для аппроксимации функции g(u) полиномом K-й степени, необходимо определить коэффициенты  $a_m \quad m = \overline{0, K}$  [10–12]. Поэтому

цель работы — выработать эффективный метод определения коэффициентов по измерениям напряжения и тока нелинейного элемента в реальном времени.

# ПРЕДЛАГАЕМЫЙ МЕТОД

Рассмотрим далее метод определения коэффициентов  $a_m \quad m = \overline{0, K}$ . Пусть на входе НЭ действует синусоидальное напряжение:

$$u(t) = U_1 \cos(2\pi f t + \varphi) = U_1 \left(\frac{1}{2}e^{j(2\pi f t + \varphi)} + \frac{1}{2}e^{-j(2\pi f t + \varphi)}\right),\tag{3}$$

где  $U_1, f u \phi$  – соответственно амплитуда, частота и фаза напряжения. Тогда зависимость тока от времени будет иметь вид

$$i(t) = g(u(t)) = \sum_{k=0}^{K} I_k \cos(k2\pi f t + \varphi).$$
 (4)

При нахождении  $I_k$  раскладываем ток через комплексные экспоненты и берем от них удвоенную действительную часть

$$I_k \cos(\alpha) = \frac{I_k}{2} e^{j\alpha} + \frac{I_k}{2} e^{-j\alpha} = 2 \operatorname{Re}\left(\frac{I_k}{2} e^{j\alpha}\right).$$
(5)

При вычислении g(u(t)) по (2) поступаем аналогично (5). Тогда для степеней косинусов с использованием биноминальных коэффициентов  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n+k)!}$  [13, 14] имеем лля, например. K = 7:

$$\left(\frac{1}{2}e^{j\alpha} + \frac{1}{2}e^{-j\alpha}\right)^{7} = \sum_{k=0}^{7} C_{7}^{k} \left(\frac{1}{2}e^{j\alpha}\right)^{7-k} \left(\frac{1}{2}e^{-j\alpha}\right)^{k} = \frac{\cos(7\alpha) + 7\cos(5\alpha) + 21\cos(3\alpha) + 35\cos(\alpha)}{64}.$$
(6)

Таким образом, для полинома, например, 7-го порядка выражение (4) примет вид

$$\begin{split} i(t) &= g\left(u(t)\right) = a_0 + a_1 U_1 \cos(\alpha) + \frac{a_2 U_1^2}{2} + \frac{a_2 U_1^2 \cos(2\alpha)}{2} + \frac{3a_3 U_1^3 \cos(\alpha)}{4} + \frac{a_3 U_1^3 \cos(3\alpha)}{4} + \\ &+ \frac{3a_4 U_1^4}{8} + \frac{a_4 U_1^4 \cos(2\alpha)}{2} + \frac{a_4 U_1^4 \cos(4\alpha)}{8} + \frac{5a_5 U_1^5 \cos(\alpha)}{8} + \frac{5a_5 U_1^5 \cos(3\alpha)}{16} + \frac{a_5 U_1^5 \cos(5\alpha)}{16} + \\ &+ \frac{5a_6 U_1^6}{16} + \frac{15a_6 U_1^6 \cos(2\alpha)}{32} + \frac{3a_6 U_1^6 \cos(4\alpha)}{16} + \frac{a_6 U_1^6 \cos(6\alpha)}{32} + \\ &+ \frac{35a_7 U_1^7 \cos(\alpha)}{64} + \frac{21a_7 U_1^7 \cos(3\alpha)}{64} + \frac{7a_7 U_1^7 \cos(5\alpha)}{64} + \frac{a_7 U_1^7 \cos(7\alpha)}{64}. \end{split}$$

Теперь можем записать выражения для гармоник тока полинома 7-го порядка:

$$\begin{split} I_0 &= a_0 + \frac{1}{2}a_2U_1^2 + \frac{3}{8}a_4U_1^4 + \frac{5}{16}a_6U_1^6, \\ I_1 &= a_1U_1 + \frac{3}{4}a_3U_1^3 + \frac{5}{8}a_5U_1^5 + \frac{35}{64}a_7U_1^7, \\ I_2 &= \frac{1}{2}a_2U_1^2 + \frac{1}{2}a_4U_1^4 + \frac{15}{32}a_6U_1^6, \\ I_3 &= \frac{1}{4}a_3U_1^3 + \frac{5}{16}a_5U_1^5 + \frac{21}{64}a_7U_1^7, \\ I_4 &= \frac{1}{8}a_4U_1^4 + \frac{3}{16}a_6U_1^6, \\ I_5 &= \frac{1}{16}a_5U_1^5 + \frac{7}{64}a_7U_1^7, \\ I_6 &= \frac{1}{32}a_6U_1^6, \\ I_7 &= \frac{1}{64}a_7U_1^7. \end{split}$$

В результате, используя данный математический аппарат, определяем выражения для определения гармоник тока через коэффициенты разложения и амплитудное значение входного напряжения [17, 16] для полинома любого порядка

$$I_{0} = a_{0} + \frac{1}{2}U_{1}^{2}a_{2} + \frac{3}{8}U_{1}^{4}a_{4} + \dots + \frac{63}{256}U_{1}^{10}a_{10} + \frac{231}{1024}U_{1}^{12}a_{12} + \dots,$$

$$I_{1} = U_{1}a_{1} + \frac{3}{4}U_{1}^{3}a_{3} + \dots + \frac{63}{128}U_{1}^{9}a_{9} + \frac{231}{512}U_{1}^{11}a_{11} + \dots,$$

$$I_{2} = \frac{1}{2}U_{1}^{2}a_{2} + \frac{1}{2}U_{1}^{4}a_{4} + \dots + \frac{105}{256}U_{1}^{10}a_{10} + \frac{99}{256}U_{1}^{12}a_{12} + \dots,$$

$$\vdots$$

$$I_{9} = \frac{1}{256}U_{1}^{9}a_{9} + \frac{11}{1024}U_{1}^{11}a_{11} + \dots + \frac{595}{16384}U_{1}^{17}a_{17} + \frac{2907}{65536}U_{1}^{19}a_{19} + \dots,$$

$$I_{10} = \frac{1}{512}U_{1}^{10}a_{10} + \frac{3}{512}U_{1}^{12}a_{12} + \dots + \frac{765}{32768}U_{1}^{18}a_{18} + \frac{969}{32768}U_{1}^{20}a_{20} + \dots,$$

$$\vdots$$

$$(7)$$

Коэффициенты для восьми гармоник тока сведены в табл. 1.

Полученные выражения для гармоник тока  $I_k$  можно записать для любого порядка полинома. Постоянная составляющая тока будет находиться по формуле

$$I_0 = \sum_{i=0}^{K} \frac{a_i U_1^i}{2^i} \frac{i!}{\left(\left(\frac{i}{2}\right)!\right)^2}.$$
(8)

При расчете данного выражения используются только четные коэффициенты. Ненулевые гармоники рассчитываются по формуле

$$I_n = \sum_{i=0}^{K} \frac{a_i U_1^i}{2^{i-1}} \frac{i!}{\left(\frac{i+n}{4}\right)! \left(\frac{i-n}{4}\right)!},\tag{9}$$

где *n* – номер гармоники.

Стоит отметить, что для вычисления нечетных гармоник используются только нечетные коэффициенты и наоборот.

Таким образом, получены выражения для гармоник тока  $I_k$  через коэффициенты  $a_m \quad m = \overline{0, K}$  нелинейной характеристики g(u). Решив полученную систему уравнений (7), определим искомые коэффициенты  $a_m \quad m = \overline{0, K}$ .

Решение системы уравнений (7) также может быть найдено аналитически для произвольного K [16–18]. Формулы для коэффициентов  $a_m$   $m = \overline{0, K}$  через значения гармоник тока  $I_k$  будут иметь следующий вид

$$a_0 = I_0 + \sum_{i=1}^{K-1} I_{2i} (-1)^i,$$
  
$$a_n = \frac{2^{n-1}}{U_1^n} \left( I_n + \sum_{i=1}^{K-1} \frac{I_{n+2i} (-1)^i (n+2i)(i+n-1)!}{i!n!} \right),$$

где n — номер коэффициента. Для, например, K = 10 искомые коэффициенты будут иметь вид

$$\begin{split} a_0 &= I_0 - I_2 + I_4 - I_6 + \dots - I_{14} + I_{16} - I_{18}, \\ a_1 &= \frac{I_1 - 3I_3 + 5I_5 - 7I_7 + \dots - 15I_{15} + 17I_{17}}{U_1}, \\ a_2 &= \frac{2(I_2 - 4I_4 + 9I_6 - 16I_8 + \dots - 64I_{16} + 81I_{18})}{U_1^2}, \\ &\vdots \\ a_9 &= \frac{256(I_9 - 11I_{11} + 65I_{13} - 275I_{15} + 935I_{17})}{U_1^9}, \\ a_{10} &= \frac{512(I_{10} - 12I_{12} + 77I_{14} - 352I_{16} + 1287I_{18})}{U_1^{10}}. \end{split}$$

Предложенный алгоритм позволяет определить значение коэффициентов разложения нелинейной характеристики в степенной ряд любого порядка через амплитудные значения гармоник тока  $I_k$  и поданного напряжения  $U_1$ .

| ложенных через степенной ряд в одиннадцатой                               |  |
|---|--|
| Таблица 1. Результаты расчета коэффициентов для восьми гармоник тока, раз | степени нелинейной вольт-амперной характеристики |

132

| степени нелин                               | нейно                   | й вольт-ам   | перной :    | характерис  | гики        |              |              |             |             |  |                    |                                      |
|---|-------------------------|--------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|-------------|-------------|--|--------------------|--------------------------------------|
|   | ${}^{]}_{1}{}^{0}a_{0}$ | $U_1^{1}a_1$ | $U_1^2 a_2$ | $U_1^3 a_3$ | $U_1^4 a_4$ | $U_1^5 a_5$  | $U_1^{6}a_6$ | $U_1^7 a_7$ | $U_1^8 a_8$ | U <sub>1</sub> <sup>9</sup> a <sub>9</sub> | $U_1{}^{10}a_{10}$ | $\mathbf{U}_{1}^{11}\mathbf{a}_{11}$ |
| $\mathbf{I}_0$                              | 1                       |              | 1/2         |             | 3/8         |              | 5/16         |             | 35/128      |  | 63/256             |                                      |
| $\mathbf{I}_1$                              |                         | 1            |             | 3/4         |             | 5/8          |              | 35/64       |             | 63/128                                     |                    | 231/512                              |
| $\mathbf{I}_2$                              |                         |              | 1/2         |             | 1/2         |              | 15/32        |             | 7/16        |  | 105/256            |                                      |
| I <sub>3</sub>                              |                         |              |             | 1/4         |             | 5/16         |              | 21/64       |             | 21/64                                      |                    | 165/512                              |
| I <sub>4</sub>                              |                         |              |             |             | 1/8         |              | 3/16         |             | 7/32        |  | 15/64              |                                      |
| I <sub>5</sub>                              |                         |              |             |             |             | 1/16         |              | 7/64        |             | 9/64                                       |                    | 165/1024                             |
| I <sub>6</sub>                              |                         |              |             |             |             |              | 1/32         |             | 1/16        |  | 45/512             |                                      |
| I <sub>7</sub>                              |                         |              |             |             |             |              |              | 1/64        |             | 9/256                                      |                    | 55/1024                              |
| I <sub>8</sub>                              |                         |              |             |             |             |              |              |             | 1/128       |  | 5/256              |                                      |
|   |                         |              |             |             |             |              |              |             |             |  |                    |                                      |
| Таблица 2. Ам                               | плиту                   | дные значо   | ения гар    | моник тока  | а нелине    | :йной характ | серистики    | и, заданной | ионигоп     | иотяп мой                                  | степени            |                                      |
| Номер гарм                                  | 40-                     | C            |             | -           |             | ç            |              |             |             |  |                    |                                      |
| ники тока                                   | ч                       | 0            |             | 1           |             | 7            |              | ſ           |             | t  | ,                  |                                      |
| Амплитуднос<br>значение гар<br>моники тока, | e<br>, A                | 0.0350       |             | 0.0638      |             | 0.0300       |              | 0.0231      | 0           | .0050                                      | 0.0                | 031                                  |
|   | -                       |              | -           |             | -           |              |              |             |             |  |                    |                                      |

**Таблица 3.** Амплитудные значения гармоник тока нелинейной характеристики, заданной полиномом пятой степени при подаче случайной ошибки

| Номер гармоники тока   | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Амплитудное значение гармоники тока при величине ошибки 10 <sup>-3</sup> , А | 0.0350 | 0.0637 | 0.0300 | 0.0231 | 0.0050 | 0.0032 |
| Амплитудное значение гармоники тока при величине ошибки 10 <sup>-2</sup> , А | 0.0351 | 0.0638 | 0.0302 | 0.0231 | 0.0052 | 0.0033 |

#### ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА

В качестве экспериментального подтверждения правильности данного алгоритма рассмотрим нелинейную зависимость, заданную полиномом пятой степени

$$i = 0.01 + 0.01u + 0.02u^{2} + 0.03u^{3} + 0.04u^{4} + 0.05u^{5}.$$

В результате моделирования в пакете MATLAB были получены амплитудные значения гармоник тока (табл. 2).

Используя данные значения гармоник тока, находим значения коэффициентов разложения в степенной ряд:

$$a_{0} = 0.035 - 0.03 + 0.005 = 0.01, \quad a_{1} = \frac{2^{\circ}}{1^{1}} (0.0638 - 3 \cdot 0.0231 + 5 \cdot 0.0031) = 0.01,$$
$$a_{2} = \frac{2^{1}}{1^{2}} (0.03 - 4 \cdot 0.005) = 0.02, \quad a_{3} = \frac{2^{2}}{1^{3}} (0.0231 - 5 \cdot 0.0031) = 0.03,$$
$$a_{4} = \frac{2^{3}}{1^{4}} (0.005) = 0.04, \quad a_{5} = \frac{2^{4}}{1^{5}} (0.0031) = 0.05.$$

Далее определим амплитудные значения гармоник тока и коэффициенты разложения в степенной ряд при подаче случайной ошибки. Результаты сведем в табл. 3 и 4.

Абсолютные отклонения полученных коэффициентов при заданных величинах случайной ошибки приведены в табл. 5.

Как видно из полученных результатов, значения найденных коэффициентов равны коэффициентам заданного полинома, что может свидетельствовать о правильности полученного алгоритма.

## **ДИСКУССИЯ**

Как известно, спектральный анализ включает изучение характеристик источника воздействия и функционирующей аппаратуры [18, 19]. Но со временем и под воздействием дестабилизирующих факторов характеристики подаваемого сигнала могут изменяться. В результате таких воздействий сигнал на выходе аппаратуры может быть изменен. В спектре появятся более высокие гармоники, которые приводят к

Таблица 4. Значения коэффициентов разложения в степенной ряд при подаче случайной ошибки

| Номер коэффициента  | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Значение коэффициента при величине ошибки 0                   | 0.0100 | 0.0100 | 0.0200 | 0.0300 | 0.0400 | 0.0500 |
| Значение коэффициента<br>при величине ошибки 10 <sup>-3</sup> | 0.0100 | 0.0104 | 0.0200 | 0.0284 | 0.0400 | 0.0512 |
| Значение коэффициента<br>при величине ошибки 10- <sup>2</sup> | 0.0101 | 0.0110 | 0.0188 | 0.0264 | 0.0416 | 0.0528 |

| Номер коэффициента                     | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\Delta$ при величине ошибки $10^{-3}$ | 0.0000 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0016 | 0.0000 | 0.0012 |
| $\Delta$ при величине ошибки $10^{-2}$ | 0.0001 | 0.0010 | 0.0012 | 0.0036 | 0.0016 | 0.0028 |

Таблица 5. Абсолютные отклонения полученных коэффициентов при подаче случайной ошибки

искажениям, что отражается на безопасности и уязвимости таких систем. Основной задачей в данном случае становится определение гармонических составляющих воздействия на аппаратуру различного назначения. Поэтому анализ воздействия сигналов различного рода на нелинейные устройства будет являться предметом дальнейших научных исследований.

Спектральный анализ дает максимально качественную оценку воздействия дестабилизирующих факторов на объекты энергетических и телекоммуникационных устройств в любой момент эксплуатации. Последствия таких воздействий, как правило, приводят к сбоям в работе управляющих систем. Эти влияния оказывают воздействия на работу как аналогового, так и цифрового оборудования, что в настоящее время актуально при разработке и эксплуатации систем гражданского и специального назначения.

В результате проделанной работы можно утверждать, что полученные математические выражения  $a_m \quad m = \overline{0, K}$  справедливы при исследовании любых ВАХ и значительно упрощают обработку и сокращают время проведения таких измерений НЭ. Предметом дальнейшей работы может стать исследование полученного алгоритма на практическую применимость при измерении реальных нелинейных устройств в реальных условиях, т.е. при разных уровнях шумов.

#### выводы

В данной статье предложен вариант измерения нелинейной ВАХ, основанный на определении коэффициентов разложения степенного ряда, полученного при полиномиальной аппроксимации. Также выполнено исследование предлагаемого метода, по результатам которого можно утверждать, что он имеет достаточно высокую точность. В завершении составлен план дальнейших исследований в рассматриваемом направлении.

Метод полезен при проектировании и эксплуатации систем гражданского и специального назначения, так как его использование позволяет повысить информационную защищенность систем различного назначения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Бизяев М.Н., Шестаков А.Л. Восстановление динамически искаженных сигналов испытательно-измерительных систем методом скользящих режимов // Известия РАН. Серия "Энергетика". 2004. № 6. С. 114–125.
- 2. *Кноррине В.Г., Солопченко Г.Н.* Теория измерений как самостоятельная область знаний: характеризационные цели и задачи // Измерительная техника. 2003. № 3. С. 13–17.

- Hajiyev Ch. Innovation approach based measurement error self-correction in dynamic systems // Measurement. 2006. № 39. P. 585–593.
- 4. Vieira W.G., Santos V.M.L., Carvalho F.R., Pereira J.A.F.R., Fileti A.M.F. Identification and predictive control of a FCC unit using a MIMO neural model I // Chemical Engineering and Processing. 2005. № 44. P. 855–868.
- 5. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. 4-е изд. Т. 1 / СПб.: Питер, 2003. 463 с.
- 6. *Козлов В.Н., Куприянов В.Е., Шашихин В.Н.* Управление энергетическими системами. Теория автоматического управления / под ред. Козлова В.Н. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 255 с.
- 7. Грицутенко С.С., Коровкин Н.В. Метод измерения характеристик нелинейных элементов электрических цепей // Электричество. 2019. № 1. С. 37–44.
- 8. *Черемисин В.Т., Грицутенко С.С.* Способ повышения точности измерения гармонических составляющих тягового тока и напряжения. Вестник Ростовского гос. университета путей сообщения. 2007. № 2. С. 94–99.
- 9. Грицутенко С.С. К вопросу об измерении параметров дискретизированного сигнала // Вопросы радиоэлектроники. 2010. Т. 1. № 3. С. 103–107.
- 10. *Куралбаев З.К., Ержан А.А.* Использование аппроксимирующих функций для описания вольтамперных характеристик нелинейных элементов цепи // Вестник НАН РК. 2013. № 2. С. 23.
- 11. Дикусар Н.Д. Полиномиальная аппроксимация высоких порядков //Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 9. С. 89–109.
- 12. Богуславский И. Полиномиальная аппроксимация для нелинейных задач оценивания и управления. // Litres, 2022.
- Ерусалимский Я.М. Биномиальные коэффициенты в тождествах для натуральных чисел, факториалов и многочленов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2008. № 5. С. 26–28.
- Балыко И.А., Левашов С.В., Холодов Д.В. Выражения для сумм рядов с биноминальными коэффициентами // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения. 2012. Т. 12. №. 7. С. 139–142.
- 15. *Коровкин Н.В., Грицутенко С.С.* О применимости быстрого преобразования Фурье для гармонического анализа несинусоидальных токов и напряжений. Изв. РАН. Энергетика. 2017. № 2. С. 73–86.
- Тихомиров С.Г. Анализ сложных нелинейных электрических цепей в частотной области методом баланса производных // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 68–90.
- Белага Э.Г. О вычислении значений многочлена от одного переменного с предварительной обработкой коэффициентов // Проблемы кибернетики. 1961. Т. 5. С. 7–15.
- 18. *Михайлов Р.Л., Макаренко С.И*. Оценка устойчивости сети связи в условиях воздействия на нее дестабилизирующих факторов // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2013. № 4 (12). С. 69–79.
- Митрохин В.Е., Федотов Д.А. Влияния коммутационных перенапряжений на устойчивость функционирования и информационную безопасность систем телекоммуникаций // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. 2009. № 1–2 (19). С. 5–7.

# Determination of Coefficients of De composition of a Nonlinear Characteristic into a Power Series

N. V. Korovkin<sup>1</sup>, S. S. Gritsutenko<sup>2</sup>, D. A. Fedotov<sup>3,\*</sup>

<sup>1</sup>Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia <sup>2</sup>"NPO TEKHNO-AS", Kolomna, Russia <sup>3</sup>Omsk State Transport University, Omsk, Russia <sup>\*</sup>e-mail: fedotoff-dm@yandex.ru

The problem of monitoring the parameters of nonlinear elements included in various electrical devices is considered. A new algorithm for reproducing the nonlinear current-voltage characteristic of a device based on the measurement results has been proposed and investigated, which has several advantages over the known ones, allowing, in particular, to obtain an analytical representation of the current-voltage characteristic in real time. The proposed algorithm is based on the direct determination of the coefficients of the polynomial approximation of the current-voltage characteristic. A review of scientific research done to date by other authors dealing with this problem has also been carried out. Formulas for determining the amplitudes of current harmonics through power series coefficients and voltage amplitudes on a nonlinear element are obtained. Binomial coefficients are used to facilitate intermediate calculations. The relations for the zero, odd and even harmonics of the current are obtained, as well as analytical expressions for the coefficients of the polynomial approximation. An experimental study of the proposed method was carried out, according to the results of which an assessment of its accuracy was made. The use of the proposed method significantly simplifies the processing and reduces the measurement time of nonlinear VAC.

*Keywords:* volt ampere characteristic, nonlinear element, approximation, current harmonic, decomposition coefficient